

Дифференциальные модели и их решения

Обычно, когда какую-то физическую задачу, связанную с изменяющейся ситуацией, хотят свести к математической, то рассматривают два близких момента типа «было» и «стало» (например, состояние рассматриваемого объекта или системы объектов в моменты времени t и $t + \Delta t$) и затем используют различные законы сохранения (массы, энергии, импульса и т.д.), чтобы связать воедино эти самые «два близких момента». Многие задачи при таком подходе сводятся к дифурам. Или обыкновенным, или в частных производных. Мы займёмся первыми.

Начнём со списка рекомендуемой литературы. Это три книги, в которых задачам с физическим содержанием отведена не роль мелких иллюстраций излагаемой теории, а, скорее, сама теория играет вспомогательную роль.

1. Я.Б. Зельдович. Высшая математика для начинающих. М., Наука, 1970. 560 с.

Вообще-то, эту книгу надо читать в школе, но даже выпускник мехмата, если он сталкивается с физическими приложениями лишь эпизодически, найдёт в этой книге для себя много интересного. Если отбросить азы про дифференцирование и интегрирование, то вся она посвящена физическим задачам. Идём по оглавлению: вытекание воды из сосуда; радиоактивный распад (не один стандартный пример, кочующий из одного дифурного учебника в другой, а весьма подробное обсуждение, занимающее 15 параграфов); механические приложения, включая реактивное движение и различные задачи о колебаниях; тепловое движение молекул и распределение плотности воздуха в атмосфере; колебательные явления в электрических цепях (тоже изложение с вниманием к деталям, начинающееся с основных понятий и единиц измерения и заканчивающееся нелинейным сопротивлением и туннельным диодом).

В своё время эта книга и её автор пережили массу «наездов» и обвинений (далее цитата из предисловия) «в математической нестрогости и чуть ли не в развращении молодёжи приблизительным, легкомысленным», но я считаю эту книгу почти Библией для школьника, который, узнав о производной и интеграле, задастся вопросом «А для чего всё это нужно?».

2. В.В. Амелькин. Дифференциальные уравнения в приложениях. М., Наука, 1987. 154 с.

Название говорит само за себя. Тоже масса примеров, включая задачу о горячем кофе, задачу о колебаниях численности популяций рыб, обсуждение вопросов о математическом маятнике и периодических режимах в электрических цепях, а также законы Кеплера.

3. Р.С. Гутер, А.Р. Янпольский. Дифференциальные уравнения. М., Высшая школа, 1976. 304 с.

Это учебник для технических вузов, поэтому теории здесь отведено больше места, чем в первых двух книгах, хотя и примеров тоже хватает.

Есть и другие книги, в которых встречаются задачи, связанные с построением дифференциальных уравнений и исследованием их решений, например, учебники по дифурам Арнольда или «Курс теоретической физики» Ландау—Лифшица, однако они, как правило, требуют более основательной математической подготовки и/или специальных знаний в какой-то области физики.

Рассмотрим теперь некоторые задачи, для которых вполне достаточно основ физики, полученных в школе.

Задача о горячем кофе

А и **Б** заказали в кафе кофе и сливки. Когда им одновременно подали по чашке одинаково горячего кофе и сливки, они поступили следующим образом:

- **А** добавил в кофе немного сливок, накрыл чашку бумажной салфеткой и вышел позвонить по телефону;
- **Б** сразу же накрыл чашку бумажной салфеткой, а добавил то же количество сливок только через 10 минут, когда вернулся **А**,

и они начали пить кофе одновременно. Кто же пил более горячий кофе?

Решение. Будем считать, что теплообмен через поверхность стола и салфетки намного меньше теплообмена через боковые стенки чашек, а температура пара в чашке над поверхностью жидкости равна температуре жидкости. Для решения задачи понадобятся уравнение теплового баланса, чтобы определить температуру смеси «кофе-сливки» после добавления в кофе сливок, и уравнение теплового рассеяния, чтобы определить закон остывания кофе (со сливками или без) с течением времени. Уравнение теплового баланса связано с использованием формулы $\Delta Q = cm\Delta T$, которая выражает зависимость количества теплоты ΔQ от удельной теплоемкости c , массы m и разности температур ΔT . Для составления уравнения теплового рассеяния нам понадобится формула $\Delta Q = \eta \frac{\Delta T}{\Delta x} \Delta S \Delta t$, выражающая (в простейшем случае) зависимость количества теплоты ΔQ , переносимое за время Δt через площадку ΔS в направлении нормали x к этой площадке, от коэффициента теплопроводности η (в данном случае, материала кофейной чашки) и скорости изменения температуры $\frac{\Delta T}{\Delta x}$. Все дельты в этих соотношениях можно, конечно, заменить на дифференциалы.

Введём следующие обозначения: $T_A(t)$ и $T_B(t)$ — температуры жидкостей в зависимости от времени в чашках **А** и **Б** соответственно; $m_K = 100$ г — масса кофе; $T_0 = 80^\circ\text{C}$ — температура кофе в начальный момент времени; $m_C = 10$ г — масса сливок; $T_B = T_C = 20^\circ\text{C}$ — температура воздуха в кафе и температура сливок; $t_1 = 600$ с — момент времени, когда надо сравнить между собой температуры T_A и T_B .

Запишем сначала уравнение теплового баланса: количество теплоты, которое кофе отдал, равно количеству теплоты, которое сливки получили. Для **А** это всё происходит в начальный момент времени. При $t = 0$ температура $T_A(0)$ равна T_0 . Пусть $T_A(0+)$ — это установившаяся температура смеси «кофе-сливки». Тогда

$$c_K m_K (T_0 - T_A(0+)) = c_C m_C (T_A(0+) - T_C).$$

Здесь $c_K = 4,1 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$ и $c_C = 3,9 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$ — удельные теплоёмкости кофе и сливок соответственно. Поэтому температура смеси «кофе-сливки» для **А** равна

$$T_A(0+) = \frac{c_K m_K T_0 + c_C m_C T_C}{c_K m_K + c_C m_C} = \frac{T_0 + \frac{c_C}{c_K} \frac{m_C}{m_K} T_C}{1 + \frac{c_C}{c_K} \frac{m_C}{m_K}} = \frac{T_0 - T_C}{1 + \frac{c_C}{c_K} \frac{m_C}{m_K}} + T_C \quad (1)$$

и, начиная с этого момента, жидкость в чашке **А** будет остывать 10 минут.

Для **Б** смешивание кофе и сливок происходит в момент времени t_1 , когда кофе уже успел остыть до температуры $T_{\mathbf{B}}(t_1)$, поэтому уравнение теплового баланса имеет вид

$$c_{\mathbf{K}}m_{\mathbf{K}}(T_{\mathbf{B}}(t_1) - T_{\mathbf{B}}(t_1+)) = c_{\mathbf{C}}m_{\mathbf{C}}(T_{\mathbf{B}}(t_1+) - T_{\mathbf{C}}),$$

и окончательная температура смеси «кофе-сливки» для **Б** равна

$$T_{\mathbf{B}}(t_1+) = \frac{c_{\mathbf{K}}m_{\mathbf{K}}T_{\mathbf{B}}(t_1) + c_{\mathbf{C}}m_{\mathbf{C}}T_{\mathbf{C}}}{c_{\mathbf{K}}m_{\mathbf{K}} + c_{\mathbf{C}}m_{\mathbf{C}}} = \frac{T_{\mathbf{B}}(t_1) + \frac{c_{\mathbf{C}}}{c_{\mathbf{K}}} \frac{m_{\mathbf{C}}}{m_{\mathbf{K}}} T_{\mathbf{C}}}{1 + \frac{c_{\mathbf{C}}}{c_{\mathbf{K}}} \frac{m_{\mathbf{C}}}{m_{\mathbf{K}}}} = \frac{T_{\mathbf{B}}(t_1) - T_{\mathbf{C}}}{1 + \frac{c_{\mathbf{C}}}{c_{\mathbf{K}}} \frac{m_{\mathbf{C}}}{m_{\mathbf{K}}}} + T_{\mathbf{C}}. \quad (2)$$

Теперь запишем уравнение теплового рассеяния. Рассмотрим малый отрезок времени $[t, t + \Delta t]$. За это время чашка **А**, в которой находятся кофе и сливки, чуть-чуть остыла, передав через стенки воздуху количество теплоты, равное

$$\Delta Q = (c_{\mathbf{C}}m_{\mathbf{C}} + c_{\mathbf{K}}m_{\mathbf{K}})(T_{\mathbf{A}}(t) - T_{\mathbf{A}}(t + \Delta t)).$$

С другой стороны, это же количество теплоты можно записать в виде

$$\Delta Q = \eta \frac{T_{\mathbf{A}}(t) - T_{\mathbf{B}}}{l} S \Delta t.$$

Здесь $\eta = 1,0 \frac{\text{Дж}}{\text{м} \cdot \text{с} \cdot ^\circ\text{C}}$ — коэффициент теплопроводности фарфора, $l = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ — толщина стенок чашки, $S = 4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$ — площадь боковой поверхности чашки. Приравняв оба выражения для ΔQ и устремляя Δt к нулю (т.е. переходя к дифференциалам),¹ получаем уравнение

$$-(c_{\mathbf{C}}m_{\mathbf{C}} + c_{\mathbf{K}}m_{\mathbf{K}}) dT_{\mathbf{A}}(t) = \eta \frac{T_{\mathbf{A}}(t) - T_{\mathbf{B}}}{l} S dt.$$

Разделяем переменные

$$\frac{dT_{\mathbf{A}}}{T_{\mathbf{A}} - T_{\mathbf{B}}} = - \frac{\eta S}{l(c_{\mathbf{C}}m_{\mathbf{C}} + c_{\mathbf{K}}m_{\mathbf{K}})} dt$$

и интегрируем:

$$\int_{T_{\mathbf{A}}(0+)}^{T_{\mathbf{A}}(t_1)} \frac{dT_{\mathbf{A}}}{T_{\mathbf{A}} - T_{\mathbf{B}}} = - \int_0^{t_1} \frac{\eta S dt}{l(c_{\mathbf{C}}m_{\mathbf{C}} + c_{\mathbf{K}}m_{\mathbf{K}})} \Rightarrow \ln \frac{T_{\mathbf{A}}(t_1) - T_{\mathbf{B}}}{T_{\mathbf{A}}(0+) - T_{\mathbf{B}}} = - \frac{\eta S t_1}{l(c_{\mathbf{C}}m_{\mathbf{C}} + c_{\mathbf{K}}m_{\mathbf{K}})}.$$

Поэтому искомая температура $T_{\mathbf{A}}(t_1)$ равна

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{A}}(t_1) &= T_{\mathbf{B}} + (T_{\mathbf{A}}(0+) - T_{\mathbf{B}}) \exp\left(-\frac{\eta S t_1}{l(c_{\mathbf{C}}m_{\mathbf{C}} + c_{\mathbf{K}}m_{\mathbf{K}})}\right) = \\ &= T_{\mathbf{C}} + \frac{T_0 - T_{\mathbf{C}}}{1 + \frac{c_{\mathbf{C}}}{c_{\mathbf{K}}} \frac{m_{\mathbf{C}}}{m_{\mathbf{K}}}} \exp\left(-\frac{\eta S}{lc_{\mathbf{K}}m_{\mathbf{K}}} \frac{t_1}{1 + \frac{c_{\mathbf{C}}}{c_{\mathbf{K}}} \frac{m_{\mathbf{C}}}{m_{\mathbf{K}}}}\right). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь при упрощениях итогового выражения были использованы равенство $T_{\mathbf{B}} = T_{\mathbf{C}}$ и формула (1).

¹ Более аккуратно: сначала записываем $-(c_{\mathbf{C}}m_{\mathbf{C}} + c_{\mathbf{K}}m_{\mathbf{K}}) \frac{T_{\mathbf{A}}(t+\Delta t) - T_{\mathbf{A}}(t)}{\Delta t} = \eta \frac{T_{\mathbf{A}}(t) - T_{\mathbf{B}}}{l} S$, затем переходим к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$.

Для **Б** всё выглядит почти так же, только тепло воздуху передаёт лишь кофе (сливки ещё не добавлены):

$$\Delta Q = c_{\text{к}} m_{\text{к}} (T_{\text{Б}}(t) - T_{\text{Б}}(t + \Delta t)) = \eta \frac{T_{\text{Б}}(t) - T_{\text{в}}}{l} S \Delta t.$$

Соответствующее дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{dT_{\text{Б}}}{T_{\text{Б}} - T_{\text{в}}} = -\frac{\eta S}{lc_{\text{к}}m_{\text{к}}} dt,$$

и после интегрирования

$$\int_{T_{\text{Б}}(0)}^{T_{\text{Б}}(t_1)} \frac{dT_{\text{Б}}}{T_{\text{Б}} - T_{\text{в}}} = -\int_0^{t_1} \frac{\eta S}{lc_{\text{к}}m_{\text{к}}} dt \Rightarrow \ln \frac{T_{\text{Б}}(t_1) - T_{\text{в}}}{T_{\text{Б}}(0) - T_{\text{в}}} = -\frac{\eta S}{lc_{\text{к}}m_{\text{к}}} t_1$$

находим температуру кофе в чашке **Б** перед тем, как туда были добавлены сливки:

$$T_{\text{Б}}(t_1) = T_{\text{в}} + (T_{\text{Б}}(0) - T_{\text{в}}) \exp\left(-\frac{\eta S}{lc_{\text{к}}m_{\text{к}}} t_1\right).$$

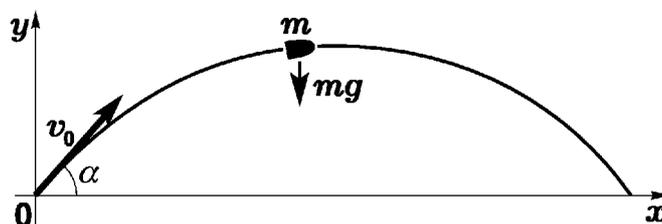
Подставляем это выражение в (2), меняем $T_{\text{Б}}(0)$ на T_0 и $T_{\text{в}}$ на $T_{\text{с}}$, и окончательно получаем:

$$T_{\text{Б}}(t_1+) = T_{\text{с}} + \frac{T_0 - T_{\text{с}}}{1 + \frac{c_{\text{с}} m_{\text{с}}}{c_{\text{к}} m_{\text{к}}}} \exp\left(-\frac{\eta S}{lc_{\text{к}}m_{\text{к}}} t_1\right). \quad (4)$$

Сравнивая формулы (3) и (4), легко заметить, что, вне зависимости от численных значений входящих в эти формулы величин, температура $T_{\text{А}}(t_1)$ всегда больше температуры $T_{\text{Б}}(t_1+)$ из-за дополнительного множителя в знаменателе экспоненты. Численные расчёты дают следующие значения: $T_{\text{А}} = 23,7^\circ\text{С}$, $T_{\text{Б}} = 22,9^\circ\text{С}$, т.е. это уже не кофе, а чёрт знает что.

О полёте тела, брошенного под углом к горизонту

Пусть тело брошено под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0 . Требуется вывести уравнения движения тела, пренебрегая силой сопротивления воздуха.



Выберем оси координат так, как показано на рисунке. В произвольный момент полёта на тело массой m действует лишь одна сила — его вес $P = mg$. Поэтому в соответствии со вторым законом Ньютона дифференциальные уравнения в проекциях на оси x и y запишутся в виде

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg,$$

или, сокращая на t и используя более привычную для задач механики запись «с точками»,

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = -g. \quad (5)$$

Добавляем начальные условия

$$x(0) = y(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \cos \alpha, \quad \dot{y}(0) = v_0 \sin \alpha \quad (6)$$

и получаем задачу Коши. Дважды интегрируем уравнения (5) с учётом начальных условий (6) и получаем уравнения движения:

$$x(t) = v_0 t \cos \alpha, \quad y(t) = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}. \quad (7)$$

Отсюда можно сделать ряд выводов о характере движения брошенного тела. Например, найти время полёта тела до его падения на землю: $T = \frac{2v_0}{g} \sin \alpha$, рас-

стояние полета по горизонтали: $x(T) = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$ и максимальную высоту полёта:

$y_{\max} = y\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha$. Уравнения движения (7) являются параметрической формой записи параболы, которая в декартовых координатах примет вид

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (8)$$

Если рассматривать эту формулу как семейство парабол

$$F(x, y, \alpha) \equiv y - x \operatorname{tg} \alpha + \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} = 0,$$

где угол $\alpha \in [0, \pi]$ играет роль параметра, то можно найти огибающую этого семейства. Для этого достаточно записать систему уравнений

$$F(x, y, \alpha) = 0, \quad \frac{\partial F(x, y, \alpha)}{\partial \alpha} = 0,$$

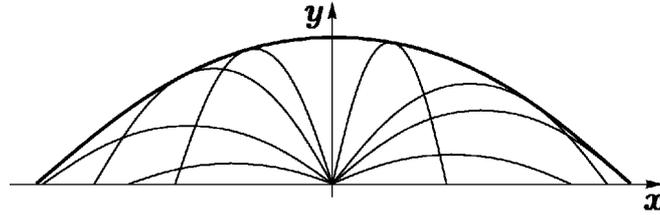
выразить из одного уравнения α через x , y и подставить в другое. В данном случае

$$\begin{cases} y - x \operatorname{tg} \alpha + \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} = 0, \\ -\frac{x}{\cos^2 \alpha} + \frac{gx^2 \sin \alpha}{v_0^2 \cos^3 \alpha} = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения находим $\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0^2}{gx}$ и подставляем в первое:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2} \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{v_0^2}{g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} \left(\left(\frac{v_0^2}{gx} \right)^2 + 1 \right) \Rightarrow y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

Получившаяся парабола (она называется «параболой безопасности») показывает до куда может долететь тело, брошенное со скоростью v_0 , и до куда не может.



НЕБОЛЬШОЕ ОТСТУПЛЕНИЕ

Математики могут болтать всё, что угодно, но физики, хотя бы немного, должны быть в здравом рассудке.

*Уиллард Гиббс*¹

С целью добавить немного реализма к исследованию вопроса о полёте материальной точки, брошенной под углом к горизонту, рассмотрим движение при наличии силы сопротивления воздуха.

Установлено, что если тело движется в жидкости или газе, его скорость движения невелика и тело имеет малые размеры, то сила сопротивления пропорциональна скорости движения

$$F(t) = -kv(t). \quad (9)$$

Здесь коэффициент k положителен,² а знак минус показывает, что сила сопротивления направлена противоположно скорости движения тела.

С учётом силы сопротивления воздуха (9) уравнения движения примут вид

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -k\dot{x}, \\ m\ddot{y} = -k\dot{y} - mg. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \frac{k}{m}\dot{x} = 0, \\ \ddot{y} + \frac{k}{m}\dot{y} + g = 0. \end{cases}$$

Начальные условия (6) при этом не изменятся.

Интегрируем эти уравнения один раз и используем начальные условия:

$$\begin{cases} \dot{x} + \frac{k}{m}x = C_1 = \dot{x}(0) + \frac{k}{m}x(0) = v_0 \cos \alpha, \\ \dot{y} + \frac{k}{m}y + gt = C_2 = \dot{y}(0) + \frac{k}{m}y(0) = v_0 \sin \alpha. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} + \frac{k}{m}x = v_0 \cos \alpha, \\ \dot{y} + \frac{k}{m}y = v_0 \sin \alpha - gt. \end{cases}$$

¹ Математики не остались в долгу у физиков. Вот что пишут Тим Постон и Иэн Стюарт в своей «Теории катастроф» (М., Мир, 1980, с. 426): «Физики вообще хотят, чтобы всё, что они рассматривают, было функцией от всего остального, — желание, которое в XIX веке разделяли и математики. (Математики сдвинулись с этого — первый шаг состоял в замещении «многозначных функций» римановыми поверхностями, но физики почти также несомненно узнают о новых математических точках зрения, как математическая община осознаёт новую физику. Имеются достойные уважения исключения даже и теперь, но когда мы увидим нового Эйлера или Пуанкаре?) Правда, физики, конечно, идут впереди социологов, многие из которых, составляя свои компьютерные программы, исходят из того, что всё есть *линейная* функция от всего остального».

² Величина этого коэффициента зависит от свойств среды, формы и размеров тела. Например, для шара радиуса R формула (9) принимает вид $F(t) = -6\pi R\eta v(t)$, где η — вязкость среды (для воздуха $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}$, для воды $\eta = 0,001$).

Если скорость тела велика или тело больших размеров, то сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости: $F(t) = -kv^2(t)$, где коэффициент k зависит от площади сечения тела и плотности среды, но практически не зависит от вязкости среды.

Этот краткий экскурс в физику я утянул у Зельдовича. Там же, в §7 шестой главы, можно найти и дополнительные подробности (например, математический смысл выражений «скорость движения невелика/велика»); см. также стр. 134 у Гутера–Янпольского.

Получилось два линейных уравнения первого порядка с неоднородной правой частью. Вид у них примерно одинаковый, поэтому достаточно решить уравнение

$$\dot{z} + \frac{k}{m} z = at + b \quad (10)$$

и затем подставить $a = 0$, $b = v_0 \cos \alpha$, чтобы получить зависимость $x(t)$, и $a = -g$, $b = v_0 \sin \alpha$ для получения зависимости $y(t)$. Сначала решаем однородное уравнение

$$\dot{z} + \frac{k}{m} z = 0 \quad \Rightarrow \quad z(t) = Ce^{-\frac{k}{m}t}.$$

Теперь можно или устроить вариацию произвольной постоянной:

$$\begin{aligned} z(t) = C(t)e^{-\frac{k}{m}t} &\Rightarrow C'(t)e^{-\frac{k}{m}t} = at + b \Rightarrow C(t) = \int e^{\frac{k}{m}t} (at + b) dt = \\ &= e^{\frac{k}{m}t} \left(\frac{am}{k} t + \frac{bm}{k} - \frac{am^2}{k^2} \right) + C \Rightarrow z(t) = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{am}{k} t + \frac{bm}{k} - \frac{am^2}{k^2}; \end{aligned}$$

или найти частное решение уравнения (10), рассматривая правую часть этого уравнения как квазиполином $(at + b)e^{0 \cdot t}$. Поскольку 0 не является корнем характеристического уравнения $\lambda + \frac{k}{m} = 0$, то частное решение надо искать в виде $z_0(t) = At + B$. Подставляем эту функцию в уравнение (10) и находим коэффициенты A, B в зависимости от a, b :

$$A + \frac{k}{m} (At + B) = at + b. \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{k}{m} A = a, \\ A + \frac{k}{m} B = b. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = \frac{am}{k}, \\ B = \frac{bm}{k} - \frac{am^2}{k^2}. \end{cases}$$

Общее решение уравнения (10) — это сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения:

$$z(t) = Ce^{-\frac{k}{m}t} + z_0(t) = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{am}{k} t + \frac{bm}{k} - \frac{am^2}{k^2}.$$

Возвращаемся к функциям $x(t), y(t)$:

$$x(t) = C_1 e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mv_0}{k} \cos \alpha, \quad y(t) = C_2 e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k} t + \frac{mv_0}{k} \sin \alpha + \frac{m^2 g}{k^2},$$

используем начальные условия $x(0) = y(0) = 0$ и получаем уравнения движения при наличии силы сопротивления воздуха (9):

$$\begin{cases} x(t) = \frac{mv_0}{k} \cos \alpha \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right), \\ y(t) = -\frac{mg}{k} t + \left(\frac{mv_0}{k} \sin \alpha + \frac{m^2 g}{k^2} \right) \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right). \end{cases} \quad (11)$$

Анализировать эти решения уже сложнее, чем решения (7), но кое-какие выводы сделать можно. Например, можно разложить правые части равенств (11) в ряды по k , считая k малым числом. Поскольку

$$\frac{1 - e^{-\frac{k}{m}t}}{k} = \frac{1 - \left(1 - \frac{kt}{m} + \frac{k^2 t^2}{2m^2} - \frac{k^3 t^3}{6m^3} + O(k^4) \right)}{k} = \frac{t}{m} - \frac{kt^2}{2m^2} + \frac{k^2 t^3}{6m^3} + O(k^3),$$

то

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \cos \alpha - \frac{kv_0 t^2}{2m} \cos \alpha + O(k^2), \\ y(t) = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} - \frac{kt^2}{2m} \left(v_0 \sin \alpha - \frac{gt}{3} \right) + O(k^2). \end{cases}$$

Отсюда видно, что в пределе при $k \rightarrow 0$ из уравнений движения (11) получаются уравнения движения (7) — естественный результат, который, тем не менее, радует, т.к. служит косвенным подтверждением правильности найденных формул. Кроме того, и для x , и для y линейные по k члены отрицательны.¹ Это означает, что при наличии силы сопротивления воздуха тело и летит пониже, и падает поближе. Такой же вывод можно получить и непосредственно из уравнений движения (11), если выразить t через x из первой формулы, подставить во вторую и показать, что получившаяся кривая полёта $y = y(x)$ лежит под параболой (8).

Напоследок рассмотрим ещё один вопрос. Пусть тело подбрасывают вертикально вверх со скоростью v_0 . Спрашивается, что больше — время взлёта или время падения? Вообще-то, это школьная задача, для ответа на которую не нужны никакие дифференциальные уравнения,² однако для математиков аналитический подход должен быть более предпочтительным. Кроме того, для ответа на вопрос «Насколько больше?» (хотя мы и не будем этим заниматься) уже нужны формулы, а не общие слова.

Полёт по вертикали соответствует углу $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Тогда уравнения движения (11) принимают вид

$$x(t) \equiv 0, \quad y(t) = -\frac{mg}{k} t + \left(\frac{mv_0}{k} + \frac{m^2 g}{k^2} \right) \left(1 - e^{-\frac{k}{m} t} \right).$$

Пусть T_\uparrow — время взлёта и T_\downarrow — время падения. Тело летит вверх при $t \in [0, T_\uparrow)$, в момент времени $t = T_\uparrow$ достигает наивысшей точки, т.е. $y_{\max} = y(T_\uparrow)$ или $y'(T_\uparrow) = 0$, затем летит вниз при $t \in (T_\uparrow, T_\uparrow + T_\downarrow]$ и в момент времени $t = T_\uparrow + T_\downarrow$ достигает земли, т.е. $y(T_\uparrow + T_\downarrow) = 0$.

Определить T_\uparrow достаточно легко:

$$y'(T_\uparrow) = 0 \Rightarrow -\frac{mg}{k} + \left(v_0 + \frac{mg}{k} \right) e^{-\frac{k}{m} T_\uparrow} = 0. \Rightarrow T_\uparrow = \frac{m}{k} \ln \left(1 + \frac{kv_0}{mg} \right) = \frac{v_0}{g} \frac{\ln(1 + \delta)}{\delta},$$

где $\delta = \frac{kv_0}{mg}$ — удобный безразмерный параметр.

Определить T_\downarrow столь же просто не получится: уравнение $y(T_\uparrow + T_\downarrow) = 0$ является трансцендентным, его можно или решать численно, или находить время падения, раскладывая

¹ Для $x(t)$ это выполняется при всех $t \neq 0$. Для $y(t)$ это выполняется при $t \in \left(0, \frac{3v_0}{g} \sin \alpha \right)$. Движение происходит при $t \in [0, T]$, где T — время приземления. Так как $y(T) = 0$, то достаточно показать, что $y\left(\frac{3v_0}{g} \sin \alpha\right) < 0$. Докажите это неравенство самостоятельно. Подсказка: из (11) следует, что $y\left(\frac{3v_0}{g} \sin \alpha\right) = \frac{v_0^2}{g} \sin^2 \alpha \cdot f(\delta)$, где $f(\delta) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{3}{\delta} + \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta^2}\right)(1 - e^{-3\delta})$ и $\delta = \frac{kv_0}{mg} \sin \alpha$ — безразмерная величина. Осталось заметить, что $f(0) = -\frac{3}{2}$, $f(+\infty) = 0$ и $f'(\delta) > 0$ для всех $\delta \geq 0$.

² Достаточно вспомнить о *диссипации* (или *рассеянии*) *энергии*: во время реального движения тело непрерывно теряет энергию. Поэтому, когда тело находится на высоте h и летит вверх (обозначим это состояние через \uparrow), его полная энергия больше, чем на той же высоте во время полёта вниз (это момент \downarrow). Потенциальные энергии в эти моменты равны, а значит кинетическая энергия $K_\uparrow(h)$ больше, чем кинетическая энергия $K_\downarrow(h)$. Следовательно, скорость $v_\uparrow(h)$ больше, чем скорость $v_\downarrow(h)$. Поскольку тело преодолевает одинаковое расстояние и когда летит вверх, и когда летит вниз, то время полёта вверх меньше, чем время полёта вниз за счёт большей скорости при взлёте, чем при падении на каждой высоте h .

$y(t)$ в ряд по степеням δ (и считая δ малой величиной).¹ Тем не менее, ответить на поставленный вопрос можно без труда, если заметить, что в момент времени $2T_{\uparrow}$ тело ещё находится в полёте. Иначе говоря, $y(2T_{\uparrow}) > 0 = y(T_{\uparrow} + T_{\downarrow})$, а значит $T_{\uparrow} < T_{\downarrow}$.

Для доказательства неравенства $y(2T_{\uparrow}) > 0$ возьмём выражение для $y(t)$, подставим в него $t = 2T_{\uparrow} = \frac{2v_0}{g} \frac{\ln(1+\delta)}{\delta}$ и заменим все k на $\frac{mg\delta}{v_0}$. Тогда получим

$$y(2T_{\uparrow}) = \frac{v_0^2}{g} \frac{1}{\delta^2} \left(\frac{2\delta + \delta^2}{1 + \delta} - 2 \ln(1 + \delta) \right).$$

Обозначим функцию в скобках через $f(\delta)$ и исследуем её поведение. При малых δ

$$f(\delta) = (2\delta + \delta^2)(1 - \delta + \delta^2 + O(\delta^3)) - 2 \left(\delta - \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{3} + O(\delta^4) \right) = \frac{\delta^3}{3} + O(\delta^4),$$

т.е. $f(0) = 0$. Далее,

$$f'(\delta) = \frac{(2 + 2\delta)(1 + \delta) - (2\delta + \delta^2)}{(1 + \delta)^2} - \frac{2}{1 + \delta} = \frac{\delta^2}{(1 + \delta)^2} > 0,$$

поэтому функция $f(\delta)$ положительна при всех положительных δ и тем самым неравенство $y(2T_{\uparrow}) > 0$ доказано.

Вытекание жидкости из сосуда

Предположим, что сосуд, площадь S поперечного сечения которого есть известная функция высоты h , $S = S(h)$, наполнен жидкостью до уровня H . В дне сосуда имеется малое отверстие площади s_0 , через которое жидкость вытекает. Известно, что если вытекание происходит через малое отверстие или короткую трубку, то скорость вытекания v зависит только от высоты жидкости в сосуде:

$$v = \mu \sqrt{2gh},$$

в частности, v не зависит от формы сосуда.² Здесь g — ускорение свободного падения, μ — эмпирический коэффициент (для воды $\mu = 0,62$; для керосина $\mu = 0,6$). Необходимо определить время T , за которое жидкость вытечет из сосуда полностью.

Решение. Будем сразу записывать всё в дифференциалах, не используя промежуточный вариант с Δ , как в рассмотренной выше задаче о кофе. Пусть в некото-

¹ Если определить переменную Δ соотношением $T_{\uparrow} + T_{\downarrow} = \frac{v_0}{g} \frac{\Delta}{\delta}$, то уравнение $y(T_{\uparrow} + T_{\downarrow}) = 0$ примет вид

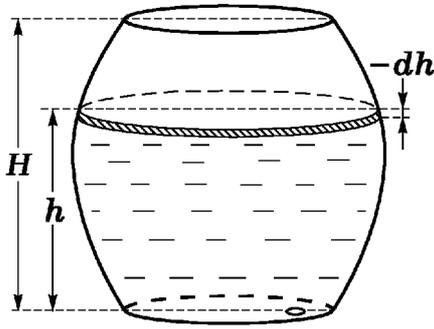
$$\frac{1 - e^{-\Delta}}{\Delta} = \frac{1}{1 + \delta} \Rightarrow \delta = -1 + \Delta + \frac{\Delta}{e^{\Delta} - 1}.$$

Здесь можно было бы поговорить и о числах Бернулли, и о ряде Бюрмана–Лагранжа, и об n -й производной сложной функции, но это всё же темы не для курса дифуров, поэтому выпишем только несколько первых членов разложения $\Delta(\delta)$:

$$\Delta(\delta) = 2\delta - \frac{2}{3}\delta^2 + \frac{4}{9}\delta^3 + \dots$$

Следовательно, если $T_{\uparrow} = \frac{v_0}{g} \frac{\ln(1+\delta)}{\delta} \approx \frac{v_0}{g} \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)$, то $T_{\downarrow} = \frac{v_0}{g} \frac{\Delta}{\delta} - T_{\uparrow} \approx \frac{v_0}{g} \left(1 - \frac{\delta}{6}\right)$.

² См., например, «Фейнмановские лекции по физике. Задачи и упражнения с ответами и решениями» (М., Мир, 1978), задача 4.12 на стр. 200. Кстати, если вытекание происходит через тонкую длинную трубку, то скорость вытекания зависит от высоты жидкости линейно: $v = kh$.



рый момент времени t высота жидкости в сосуде равна h . За промежуток времени $[t, t + dt]$ количество вытекшей жидкости dV можно подсчитать двумя способами, используя закон сохранения массы:

$$dV = s_0 v(h) dt \quad \text{и} \quad dV = -S(h) dh.$$

Первое равенство показывает сколько жидкости вытекло из отверстия и получается как объём цилиндра с площадью основания s_0 и высотой $v(h) dt$. Второе равенство показывает насколько понизился уровень жидкости в сосуде и тоже получается как объём цилиндра бесконечно малой высоты $-dh$ (знак минус поставлен из-за убывания высоты с течением времени, т.е. $h(t + dt) - h(t) = dh < 0$). Приравниваем оба выражения друг другу и получаем дифференциальное уравнение:

$$s_0 \mu \sqrt{2gh} dt = -S(h) dh \quad \Rightarrow \quad dt = -\frac{S(h)}{s_0 \mu \sqrt{2gh}} dh. \quad (12)$$

В момент времени $t = 0$ высота жидкости была $h = H$, в момент времени $t = T$ вся жидкость вытекла, т.е. $h = 0$. Интегрируем с такими пределами обе части дифференциального уравнения (12) и получаем

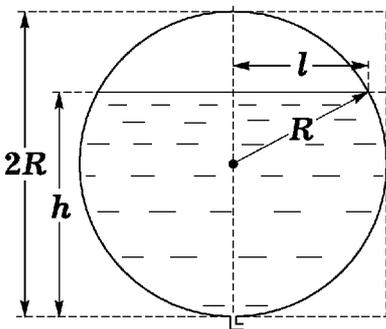
$$\int_0^T dt = -\frac{1}{s_0 \mu \sqrt{2g}} \int_H^0 \frac{S(h)}{\sqrt{h}} dh \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{s_0 \mu \sqrt{2g}} \int_0^H \frac{S(h)}{\sqrt{h}} dh.$$

Таким образом, в зависимости от формы сосуда получаются разные ответы.

91. За какое время вытечет вся вода из цилиндрического бака диаметром $2R = 1,8$ м и высотой $H = 2,45$ м через отверстие в дне диаметром $2r = 0,06$ м. Ось цилиндра вертикальна.

Решение. В данном случае $s_0 = \pi r^2$ и площадь поперечного сечения постоянна: $S(h) = \pi R^2$. Поэтому

$$T = \frac{1}{\mu \sqrt{2g}} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \int_0^H \frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \sqrt{\frac{2H}{g}} = \frac{30^2}{0,62} \sqrt{\frac{4,9}{9,8}} \approx 1026 \text{ с.}$$



92. Решить предыдущую задачу в предположении, что ось цилиндра расположена горизонтально, а отверстие находится в самой нижней части цилиндра.

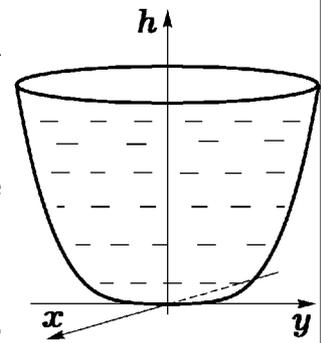
Решение. Здесь по-прежнему $s_0 = \pi r^2$, но вот роль высоты бака играет теперь диаметр $2R$, а площадь поперечного сечения равна

$$S(h) = 2lh = 2H \sqrt{R^2 - (h - R)^2} = 2H \sqrt{2Rh - h^2}.$$

Поэтому

$$T = \frac{1}{\pi r^2 \mu \sqrt{2g}} \int_0^{2R} 2H \sqrt{2R - h} dh = \frac{8HR\sqrt{R}}{3\pi r^2 \mu \sqrt{g}} \approx 1017 \text{ с.}$$

Ещё одна задача, связанная с вытеканием воды из сосуда, относится к античным временам. В греческих и римских судебных разбирательствах во избежание слишком долгих выступлений адвокатов использовались для хронометража водяные часы. Они представляли собой чашу, из которой через небольшое отверстие на дне вытекала вода. Требуется найти такую форму водяных часов, при которой уровень воды убывал бы с постоянной скоростью.



Эта задача легко решается с помощью дифференциального уравнения (12), которое мы только перепишем в виде

$$\sqrt{h} = -\frac{S(h)}{s_0\mu\sqrt{2g}} \frac{dh}{dt}.$$

По условию, $\frac{dh}{dt} = -v_0 = \text{const}$. Тогда, рассматривая чашу как поверхность вращения (т.е. считая, что площадь поперечного сечения зависит от переменных x, y как $S(h) = \pi(x^2 + y^2)$), получаем

$$\sqrt{h} = \frac{\pi(x^2 + y^2)}{s_0\mu\sqrt{2g}} v_0 \Rightarrow h = c(x^2 + y^2)^2,$$

т.е. форма чаши водяных часов получается вращением кривой $h = cx^4$ вокруг оси h .

Дифференциальные модели в экологии

Экология изучает взаимоотношение человека и вообще живых организмов с окружающей средой. Основным объектом экологии является эволюция популяций. При этом во многих задачах, связанных с подсчётом численности популяций, на протяжении средней длительности жизни одной особи вырастает несколько поколений, поэтому численность популяции с некоторым приближением можно считать непрерывной функцией от времени t .

Пусть $N(t)$ — число особей в популяции в момент времени t . Тогда если за единицу времени рождается A особей, а умирает B особей, то, игнорируя влияние всякого рода внешних обстоятельств (типа мор или эпидемия, неурожай или резкое падение объема кормов, землетрясение или наводнение, нашествие врага или обвал рубля, разрушение озонового слоя, ядерная зима и т.п.), с достаточным основанием можно утверждать, что скорость изменения N со временем задаётся формулой

$$\frac{dN}{dt} = A - B.$$

Адекватное построение модели требует знания зависимостей $A(N)$ и $B(N)$. Если такая информация есть, то данное дифференциальное уравнение можно решить и спрогнозировать характер изменения численности популяции в будущем. В простейшем случае можно считать, что $A(N) = aN$, $B(N) = bN$, где a и b — некоторые коэффициенты (т.е. и прирост, и смертность прямо пропорциональны текущей численности популяции). На практике, однако, все модели, описывающие реальные явления и процессы, являются нелинейными.

Если рассматривается модель совместного сосуществования нескольких разных популяций живых существ (например, больших и малых рыб, где малые рыбы являются пищей для больших), то приходится составлять дифференциальные уравнения для каждого вида и получать в результате систему уравнений

$$\frac{dN_k}{dt} = f_k(N_1, \dots, N_n), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Рассмотрим более подробно двухвидовую модель «хищник—жертва», которая впервые была построена Вито Вольтерра для объяснения колебаний рыбных уловов.¹

Пусть $N_1(t)$ — число больших рыб (хищников), которые питаются малыми рыбами (жертвами). Число малых рыб обозначим за $N_2(t)$. Тогда численность рыб-хищников будет расти до тех пор, пока у них будет достаточно пищи, т.е. рыб-жертв, но в конце концов наступит ситуация, когда корма не будет хватать и в результате число больших рыб начнёт уменьшаться. Это приведёт к тому, что с некоторого момента число малых рыб снова начнёт увеличиваться, что, в свою очередь, будет способствовать новому росту числа больших рыб, и цикл снова повторится. Модель, построенная Вольтерра, имеет вид

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = -\alpha_1 N_1 + \beta_1 N_1 N_2, \\ \dot{N}_2 = \alpha_2 N_2 - \beta_2 N_1 N_2, \end{cases} \quad (13)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ — положительные константы.

Расстановка знаков в уравнениях объясняется очевидными соображениями. Если в первом уравнении $N_2 \equiv 0$, то малых рыб-жертв нет, рыбам-хищникам нечего есть, поэтому их численность будет падать. Значит, при N_1 в первом уравнении должен стоять отрицательный коэффициент $-\alpha_1$. (Продолжая эти рассуждения, получим, что при $N_2 \equiv 0$ численность $N_1(t)$ меняется по экспоненте: $N_1(t) = N_1(0)e^{-\alpha_1 t}$, и, несмотря на то, что получившееся выражение не равно нулю, вся популяция рыб-хищников вымрет в тот момент T , когда $N_1(T)$ станет меньше единицы.) Точно так же во втором уравнении, если $N_1 \equiv 0$, то малым рыбам никто и ничто не угрожает, и их численность должна возрастать. Поэтому коэффициент при N_2 положителен. Нелинейные члены в каждом уравнении зависят от численности обеих популяций и частоты встреч их отдельных представителей. При каждой такой встрече численность рыб-жертв сразу уменьшается, а численность рыб-хищников увеличивается (не сразу, конечно, а в перспективе), поэтому коэффициент при $N_1 N_2$ во втором уравнении отрицателен, а в первом положителен.

¹ Итальянский биолог Умберто Д'Анкона, проводивший статистическое исследование результатов рыбной ловли в Адриатическом море в период 1905–1923 гг., отметил временное увеличение в 1914–1918 гг. количества прожорливых видов рыб по сравнению с рыбами, которыми они питаются. В 1925 году Д'Анкона привлек внимание Вольтерра к этому вопросу. В результате Вольтерра построил математическую теорию борьбы за существование для n видов. Аналогичные вопросы для случая $n = 2$ ранее рассматривал А. Лотка, который получил отдельные результаты Вольтерра. Поэтому теперь систему уравнений (13) называют уравнениями Лотка–Вольтерра. Дополнительные сведения можно найти в книге: В. Вольтерра «Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений» (М., Наука, 1982).

Для удобства исследования системы (13) перейдём к безразмерным величинам:

$$\tau = \alpha_2 t, \quad x(\tau) = \frac{\beta_2}{\alpha_2} N_1, \quad y(\tau) = \frac{\beta_1}{\alpha_1} N_2, \quad a = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}.$$

В результате система примет вид

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = -ax(1-y), \\ \frac{dy}{d\tau} = y(1-x). \end{cases} \quad (14)$$

Предполагая, что в некоторый момент времени τ_0 мы знаем численность каждой популяции, добавим к системе начальные условия

$$x(\tau_0) = x_0, \quad y(\tau_0) = y_0 \quad (15)$$

и получим задачу Коши (14)–(15).

Для нахождения связи между x и y делим первое уравнение системы (14) на второе, разделяем переменные и интегрируем с использованием начальных условий:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{ax(1-y)}{y(1-x)} = -a \frac{x(y-1)}{y(x-1)} \Rightarrow \frac{x-1}{x} dx = -a \frac{y-1}{y} dy \Rightarrow$$

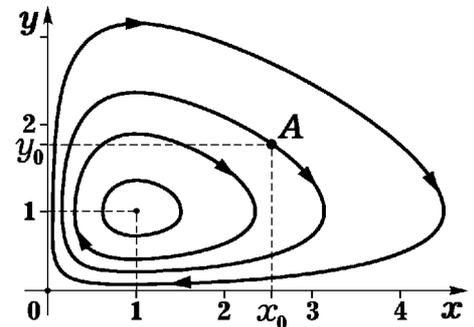
$$\int_{x_0}^x \frac{x-1}{x} dx = -a \int_{y_0}^y \frac{y-1}{y} dy \Rightarrow (x - \ln|x|) \Big|_{x_0}^x = -a(y - \ln|y|) \Big|_{y_0}^y.$$

Поскольку мы интересуемся только положительными решениями,¹ то знаки модуля у логарифмов можно убрать. Тогда получаем в неявном виде следующую зависимость между x и y :

$$x - \ln x + a(y - \ln y) = x_0 - \ln x_0 + a(y_0 - \ln y_0) = C. \quad (16)$$

Здесь C — константа, определяемая начальными условиями (15) и параметром a . (Функция $t - \ln t$ положительна при всех $t > 0$, достигает минимума при $t = 1$, поэтому C — положительная константа, $C \geq 1 + a$.)

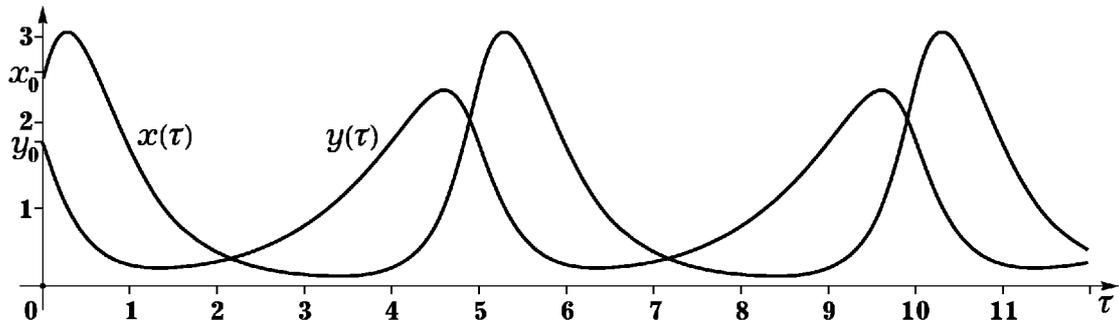
На рисунке приведены графики функций (16) для случая $a = 2$ и значений параметра $C = 3,1; 3,5; 4,0; 5,0$. Как видно из рисунка, в плоскости (x, y) все кривые замкнуты. Предположим теперь, что начальные значения x_0, y_0 задаются точкой A , показанной на рисунке, т.е. $x_0 > 1, y_0 > 1$. Тогда из уравнений системы (14) следует, что $\frac{dx}{d\tau}(\tau_0) > 0, \frac{dy}{d\tau}(\tau_0) < 0$, т.е. сначала функция $x(\tau)$ возрастает, а функция $y(\tau)$ убывает. Когда функция $y(\tau)$



достигает значения, равного единице, то $\frac{dx}{d\tau} = 0$ и затем в течение некоторого времени функции $x(\tau), y(\tau)$ будут убывать вместе. Для $y(\tau)$ это убывание прекратится тогда, когда функция $x(\tau)$ примет значение 1. В этот момент $\frac{dy}{d\tau} = 0$ и после этого

¹ Минус две рыбы бывает только у Дирака.

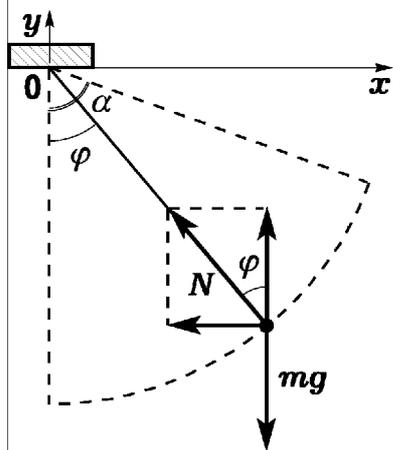
функция $y(\tau)$ начинает возрастать. Дальнейшее увеличение τ с неизбежностью приведёт нас обратно в точку A . Таким образом, переменные x и y пробегают замкнутую траекторию, а функции $x(\tau)$, $y(\tau)$ являются периодическими от τ . При этом максимум x не попадает на максимум y , т.е. колебания в популяциях происходят с одинаковым периодом, но в разных фазах. Соответствующие графики зависимостей $x(\tau)$ и $y(\tau)$ показаны на рисунке.



В заключение отметим, что изучение сообществ, взаимодействующих более сложным образом, даёт более интересные практические результаты. Так, например, если две популяции конкурируют в борьбе за один и тот же источник питания (третья популяция), то можно показать, что один из видов начнёт вымирать. При этом понятно, что если этим видом окажется источник питания, то такая же участь постигнет и два других вида.

Математический маятник

Пусть материальная точка массы m подвешена на нерастяжимой нити длины l , массой которой можно пренебречь. Если отклонить эту точку на угол $\alpha < \frac{\pi}{2}$ и отпустить, то она начнёт совершать колебательные движения в вертикальной плоскости по дуге окружности радиуса l , реализуя простейший пример маятника. Требуется найти закон движения такого маятника.



Решение. Получить уравнение движения можно по-разному. Например, можно рассмотреть действующие на материальную точку силы и использовать второй закон Ньютона: $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{N} + m\mathbf{g}$. Здесь \mathbf{N} — сила натяжения нити, $m\mathbf{g}$ — вес материальной точки. В проекциях на оси x и y это векторное уравнение примет вид:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -N \sin \varphi, \\ m\ddot{y} = N \cos \varphi - mg. \end{cases} \Rightarrow \ddot{x} \cos \varphi + \ddot{y} \sin \varphi = -g \sin \varphi.$$

Перейдём к полярным координатам. Материальная точка всегда находится на расстоянии l от точки подвеса, которую выберем в качестве центра координат. Поэтому полярный радиус всегда равен l . Полярный угол φ будем откладывать от вертикали. Тогда

$$\begin{cases} x = l \sin \varphi, \\ y = -l \cos \varphi, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = l\dot{\varphi} \cos \varphi, \\ \dot{y} = l\dot{\varphi} \sin \varphi, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = l\ddot{\varphi} \cos \varphi - l\dot{\varphi}^2 \sin \varphi, \\ \ddot{y} = l\ddot{\varphi} \sin \varphi + l\dot{\varphi}^2 \cos \varphi. \end{cases}$$

Подставляем найденные выражения для \ddot{x} , \ddot{y} в уравнение движения и получаем:

$$\ddot{x} \cos \varphi + \ddot{y} \sin \varphi = l\ddot{\varphi} = -g \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi. \quad (17)$$

Домножаем обе части на $2\dot{\varphi}$ и интегрируем:

$$2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} = -\frac{2g}{l} \dot{\varphi} \sin \varphi. \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}^2 = \frac{2g}{l} \cos \varphi + C.$$

В момент времени $t = 0$ материальная точка имеет нулевую скорость и находится в крайнем правом положении (см. рисунок). Поэтому $\varphi(0) = \alpha$, $\dot{\varphi}(0) = 0$. Используя эти начальные условия, находим значение константы: $C = -\frac{2g}{l} \cos \alpha$. Таким образом, уравнение движения маятника доведено до нелинейного диффура первого порядка:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2g}{l} (\cos \varphi - \cos \alpha). \quad (18)$$

Другой способ получить уравнение (18) заключается в применении закона сохранения энергии. Возьмём два положения маятника:

1) когда $t = 0$ и угол отклонения маятника от вертикали равен α ;

2) когда $t > 0$ и угол отклонения маятника уже равен φ

и приравняем суммы кинетической и потенциальной энергий в эти два момента:

$$0 + mg(l - l \cos \alpha) = \frac{mv^2}{2} + mg(l - |y|).$$

Поскольку $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = l^2\dot{\varphi}^2$ и $y = -l \cos \varphi$, то

$$-mgl \cos \alpha = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} - mgl \cos \varphi$$

и после небольших упрощений мы опять приходим к уравнению (18).

Приступим к решению этого уравнения:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2g}{l}} \sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha}} = \pm \sqrt{\frac{2g}{l}} dt.$$

Если обозначить через T период колебаний, то понятно, что за время $t \in [0, \frac{1}{2}T]$ маятник совершает переход из крайнего правого положения в крайнее левое, т.е. $\varphi(\frac{1}{2}T) = -\alpha$. При этом функция $\varphi(t)$ монотонно убывает, поэтому в уравнении надо взять знак «-». Затем маятник движется в обратную сторону и за время $t \in [\frac{1}{2}T, T]$ возвращается в исходное (крайнее правое) положение: $\varphi(T) = \alpha$. При этом функция $\varphi(t)$ монотонно возрастает, т.е. в уравнении надо выбрать знак «+». После этого всё повторяется. Таким образом, при $t \in [0, \frac{1}{2}T]$

$$\int_{\alpha}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha}} = -\sqrt{\frac{2g}{l}} \int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad \int_{\varphi}^{\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{2g}{l}} t, \quad (19)$$

а при $t \in [\frac{1}{2}T, T]$

$$\int_{-\alpha}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{2g}{l}} \int_{T/2}^t dt = \sqrt{\frac{2g}{l}} \left(t - \frac{T}{2} \right).$$

Получившиеся интегралы по $d\varphi$ не находятся в элементарных функциях, они выражаются через так называемые «эллиптические интегралы». Даже краткое введение в эту проблематику требует разговора как минимум на полчаса. Возможно, такой разговор вам предстоит в курсе ТФКП,¹ здесь же мы удовлетворимся только тем, что найдём период колебаний маятника.

Поскольку при $t = \frac{1}{2}T$ угол φ равен $-\alpha$, то, подставляя эти значения в соотношение (19), получим

$$T = \sqrt{\frac{2l}{g}} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha}} = 2\sqrt{\frac{2l}{g}} \int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \cos \varphi = 1 - 2 \sin^2(\frac{1}{2}\varphi) \\ \cos \alpha = 1 - 2 \sin^2(\frac{1}{2}\alpha) \end{array} \right| = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2(\frac{1}{2}\alpha) - \sin^2(\frac{1}{2}\varphi)}} \ominus$$

Делаем замену $\sin(\frac{1}{2}\varphi) \rightarrow \sin(\frac{1}{2}\alpha) \sin \varphi$ в последнем интеграле.² Тогда

$$\varphi \rightarrow 2 \arcsin\left(\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right) \sin \varphi\right), \quad d\varphi \rightarrow \frac{2 \sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right) \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{1}{2}\alpha\right) \sin^2 \varphi}}$$

и

$$\ominus 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{1}{2}\alpha\right) - \sin^2\left(\frac{1}{2}\alpha\right) \sin^2 \varphi}} \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right) \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{1}{2}\alpha\right) \sin^2 \varphi}} =$$

$$= 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{1}{2}\alpha\right) \sin^2 \varphi}} \quad \text{или} \quad T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} K\left(\sin \frac{\alpha}{2}\right), \quad (20)$$

где функцию

$$K(k) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (0 \leq k < 1) \quad (21)$$

называют полным эллиптическим интегралом первого рода, в отличие от полного эллиптического интеграла второго рода, имеющего вид

$$E(k) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad (0 \leq k < 1).$$

¹ Если до этого не дойдёт, то прочитайте самостоятельно седьмую главу в книге: М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат «Методы теории функций комплексного переменного» (М., Наука, 1973). После этого, с учётом новых знаний, можно вернуться к уравнению (18) и прочитать пятую главу книги: Л.А. Парс «Аналитическая динамика» (М., Наука, 1971).

² Специально не ввожу новую переменную, т.к. хочу сохранить обозначение φ и дальше. Есть кое-какие устоявшиеся обозначения, типа z — комплексная переменная, t — время, p — простое число; использование *амплитуды* φ и *модуля* k при определении эллиптических интегралов тоже из таковых; т.е. если не возникает путаницы с введёнными ранее обозначениями, то желательно работать в общепринятых символах.

Кстати, такой экономный стиль замены — стрелки и старые переменные вместо новых — часто используют западные авторы.

Если в последних двух интегралах верхний предел интегрирования $\frac{\pi}{2}$ заменить на φ , то получатся функции двух переменных

$$F(\varphi, k) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad E(\varphi, k) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi,$$

которые называют эллиптическим интегралом первого рода и эллиптическим интегралом второго рода соответственно (без приставки «полный»). Как уже было сказано, все эти интегралы нельзя найти в элементарных функциях, и поэтому дальнейшее исследование задачи о маятнике обычно связывают с построением траекторий на фазовой плоскости (задача 1009 из Филиппова). В своё время это построение проделаем и мы. При этом будет рассматриваться уравнение

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} - \sin \varphi = 0,$$

которое получается из уравнения (17) с помощью замен: $\sqrt{\frac{g}{l}} t \rightarrow t$, $\varphi \rightarrow \pi - \varphi$.

В заключение найдём зависимость периода T от угла α в виде ряда по степеням $k = \sin \frac{\alpha}{2}$. Для этого надо разложить подынтегральную функцию в (21) в ряд, почленно проинтегрировать, подставить результат в (20) и посмотреть что получится. Поскольку

$$(1 + x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a \dots (a-n+1)}{n!} x^n,$$

то

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2}) \dots (-\frac{2n-1}{2})}{n!} (-k^2 \sin^2 \varphi)^n = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n n!} (-1)^n k^{2n} \sin^{2n} \varphi = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \sin^{2n} \varphi. \end{aligned} \quad ^1$$

Уже видно, что при подстановке данного выражения в (21) нам придётся столкнуться с вычислением интеграла от степени синуса. Прделаем это заранее:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \varphi d\varphi = \left| \begin{array}{l} \text{замена} \\ u = \sin \varphi \end{array} \right| = \int_0^1 u^{2n} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \left| \begin{array}{l} \text{замена} \\ v = u^2 \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{v^n}{\sqrt{1-v}} \frac{dv}{2\sqrt{v}} =$$

¹ На последнем шаге я предпочёл свести всё к дважды факториалам:

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n), \quad (2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1),$$

хотя кто-то, возможно, предпочёл бы оставить обычные факториалы:

$$(2n)!! = 2^n n!, \quad (2n-1)!! = \frac{(2n-1)!!(2n)!!}{(2n)!!} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

или даже свернуть их в биномиальный коэффициент:

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}.$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_0^1 v^{n+\frac{1}{2}-1} (1-v)^{\frac{1}{2}-1} dv = \frac{1}{2} B\left(n + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n + 1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{n!} = \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{(n + \frac{1}{2} - 1)(n + \frac{1}{2} - 2) \dots (\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})}{n!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{(2n - 1)!! \sqrt{\pi}}{2^n n!} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n - 1)!!}{(2n)!!}.
\end{aligned}$$

Теперь находим разложение в ряд эллиптического интеграла $K(k)$:

$$K(k) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \varphi d\varphi = \frac{\pi}{2} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!^2}{(2n)!!^2} k^{2n} \right) \quad (22)$$

(как легко убедиться, этот ряд сходится при $k < 1$), подставляем его в (20) и получаем период T :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!^2}{(2n)!!^2} \sin^{2n} \frac{\alpha}{2} \right). \quad (23)$$

Поскольку $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, то наш ряд заведомо сходится. Сколько членов этого ряда оставлять для вычислений каждый решает сам, исходя из величины угла α и собственных представлений о допустимой погрешности. При $\alpha < 5^\circ$, скажем, можно выкинуть из (23) всю \sum и получить значение $T \approx 2\pi \sqrt{l/g}$, которое отличается от истинного менее чем на 0,1%. Ингам нашёл гораздо более точные приближения для T , которые работают при всех α от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Например,

$$\begin{aligned}
T &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(\frac{2}{\cos^2 \frac{\alpha}{4} + \sqrt{\cos \frac{\alpha}{2}}} + \delta \right), \quad \text{где } \delta \leq \frac{1}{70\,000}; \\
T &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(\frac{4}{\left(\cos \frac{\alpha}{4} + \sqrt[4]{\cos \frac{\alpha}{2}} \right)^2} + \delta \right), \quad \text{где } \delta \leq \frac{1}{2 \cdot 10^{10}}.
\end{aligned} \quad (24)$$

НЕБОЛЬШОЕ ОТСТУПЛЕНИЕ

Рассмотрение эллиптических интегралов является одним из традиционных способов определения (и получения некоторых свойств) эллиптических функций и родственных им тэта-функций и модулярных форм. Эти математические объекты в последние годы стали известны не только специалистам, но и широкой публике (хотя бы на уровне названий), благодаря их использованию Эндрю Уайлсом (Andrew Wiles) при доказательстве Великой теоремы Ферма в 1995 г. Пожалуй, самой известной среди функций такого рода является тэта-функция

$$\theta(q) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n^2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2},$$

где q — комплексный параметр, модуль которого меньше единицы (это требуется для сходимости ряда). В простейшем случае можно считать q вещественным числом, $q \in (-1, 1)$. Связь между тэта-функцией и эллиптическим интегралом $K(k)$ имеет следующий вид:

$$\pi \theta^2(q) = 2K(k), \quad \text{где } q = \exp\left(-\pi \frac{K(\sqrt{1-k^2})}{K(k)}\right).$$

Например, при $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ получаем $q = e^{-\pi}$ и

$$\theta(e^{-\pi}) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi} K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \sqrt{\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{2\pi\sqrt{\pi}}}$$

или

$$e^{-\pi} + e^{-4\pi} + e^{-9\pi} + e^{-16\pi} + \dots = \frac{1}{2^{3/2}\pi^{3/4}} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}.$$

Впервые сумму этого весьма непростого ряда экспонент выразил через гамма-функцию Лежандр.

Если возводить тэта-функцию $\theta(q)$ в различные степени и вычислять коэффициенты полученных разложений, то возникает ряд аспектов, интересных для теории чисел. Например, возведение в квадрат

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{m^2+n^2} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} \right)^2 = \theta^2(q) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_2(k)q^k$$

позволяет трактовать функцию $c_2(k)$ как количество различных представлений числа k в виде суммы двух квадратов $n^2 + m^2$, а для получения количества $c_4(k)$ различных представлений числа k в виде суммы четырёх квадратов надо «всего лишь» узнать разложение функции $\theta^4(q)$ в степенной ряд. Якоби нашёл, что

$$\theta^4(q) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_4(k)q^k = 1 + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n}{1-q^n} - 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4nq^{4n}}{1-q^{4n}}.$$

Если воспользоваться известной суммой для геометрической прогрессии

$$\frac{x}{1-x} = x \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n,$$

то равенство для четвёртой степени тэта-функции можно привести к виду

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} c_4(k)q^k &= 8 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} nq^{nm} - 8 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} 4nq^{4nm} = \\ &= 8 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{n \\ nm=k}} n \right) q^k - 8 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{n \\ 4nm=k}} 4n \right) q^k = 8 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{d|k} d - \sum_{4d|k} 4d \right) q^k. \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты в левой и правой частях последнего равенства, получаем, что число представлений $c_4(k)$ целого положительного числа k в виде суммы четырёх квадратов целых чисел (эти числа могут быть и положительными, и отрицательными, и равными нулю) равно восьмикратной сумме положительных делителей числа k , не делящихся на 4. В частности, отсюда следует знаменитая теорема, сформулированная Ферма и впервые доказанная Лагранжем: всякое натуральное число можно представить в виде суммы четырёх квадратов.

И напоследок цитата из статьи В.И. Арнольда «О преподавании математики» (УМН, 1998, № 1): «Уже Якоби заметил, как самое восхитительное свойство математики, что в ней одна и та же функция управляет и представлениями целого числа в виде суммы четырёх

квадратов, и истинным движением маятника. Эти открытия связей между разнородными математическими объектами можно сравнить с открытием связи электричества и магнетизма в физике или сходства восточного берега Америки с западным берегом Африки в геологии. Эмоциональное значение таких открытий для преподавания трудно переоценить. Именно они учат нас искать и находить подобные замечательные явления единства всего сущего». Более подробное изложение затронутых вопросов можно найти во втором томе «Курса современного анализа» Э.Т. Уиттекера и Дж.Н. Ватсона или в книге А. Гурвица и Р. Куранта «Теория функций».

Арифметико-геометрическое среднее

Рассмотрим следующую задачу, которая впервые была решена Гауссом.¹

Пусть m_0 и n_0 — два произвольных положительных числа ($m_0 > n_0$). Составим две последовательности $\{m_k\}$ и $\{n_k\}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{m_0 + n_0}{2}, & n_1 &= \sqrt{m_0 n_0}; \\ m_2 &= \frac{m_1 + n_1}{2}, & n_2 &= \sqrt{m_1 n_1}; \\ &\dots\dots\dots \\ m_{k+1} &= \frac{m_k + n_k}{2}, & n_{k+1} &= \sqrt{m_k n_k}; \end{aligned} \quad (25)$$

Легко показать, что обе последовательности сходятся к одному и тому же пределу. Действительно, во-первых, $\{m_k\}$ монотонно убывает, а $\{n_k\}$ монотонно возрастает. Чтобы это доказать заметим сначала, что $m_k > n_k$ для любого k :

$$m_k - n_k = \frac{m_{k-1} + n_{k-1}}{2} - \sqrt{m_{k-1} n_{k-1}} = \frac{(\sqrt{m_{k-1}} - \sqrt{n_{k-1}})^2}{2} > 0.$$

Поэтому

$$m_0 = \frac{m_0 + m_0}{2} > \frac{m_0 + n_0}{2} = m_1 = \frac{m_1 + m_1}{2} > \frac{m_1 + n_1}{2} = m_2 > m_3 > \dots > m_k > \dots$$

и

$$n_0 = \sqrt{n_0 n_0} < \sqrt{m_0 n_0} = n_1 = \sqrt{n_1 n_1} < \sqrt{m_1 n_1} = n_2 < n_3 < \dots < n_k < \dots$$

Во-вторых, последовательность $\{m_k\}$ ограничена снизу, а последовательность $\{n_k\}$ сверху. Это сразу видно, если объединить уже выписанные неравенства в одно: $m_0 > m_k > n_k > n_0$, которое выполняется для всех k . Следовательно, $\{m_k\}$ и $\{n_k\}$ сходятся к m_∞ и n_∞ соответственно. Переходя в (25) к пределу при $k \rightarrow \infty$, получим

$$m_\infty = \frac{m_\infty + n_\infty}{2}, \quad n_\infty = \sqrt{m_\infty n_\infty}.$$

¹ Она не относится к физическим задачам, но при её решении тоже возникает эллиптический интеграл $K(k)$. Поэтому, хотя и косвенно, она связана с задачей о математическом маятнике. Кроме того, я хотел бы устроить небольшой отдых от физики и поговорить о чистой математике.

Таким образом, $m_\infty = n_\infty$. По вполне понятным причинам этот предел называется *арифметико-геометрическим средним* и обычно обозначается $\text{AGM}(m_0, n_0)$. Осталось его найти.

Приведём принадлежащее немецкому математику К.В. Борхардту изящное решение этой задачи, связанное с построением линейного дифференциального уравнения второго порядка.

Для начала выпишем некоторые простые свойства функции $\text{AGM}(m_0, n_0)$ как функции своих аргументов, считая, что m_0, n_0 могут быть и равными друг другу, и нулевыми:

1. $\text{AGM}(m_0, m_0) = m_0$ для любого $m_0 \geq 0$;
2. $\text{AGM}(m_0, 0) = \text{AGM}(0, n_0) = 0$ для любых $m_0 \geq 0, n_0 \geq 0$;
3. $\text{AGM}(m_0, n_0) = \text{AGM}(m_k, n_k)$ для любого $k \geq 0$;
4. $\text{AGM}(c \cdot m_0, c \cdot n_0) = c \cdot \text{AGM}(m_0, n_0)$ для любого $c \geq 0$.

Первые два свойства тривиальны: если начальные значения m_0 и n_0 равны, то $m_k = n_k = m_0$ для всех k и в пределе получаем свойство 1. Если же одно из начальных значений m_0, n_0 равно нулю, то $n_1 = 0$, а за ним и все остальные n_k равны нулю. Следовательно, $m_k = m_{k-1}/2 = m_{k-2}/2^2 = \dots = m_0/2^k$ для всех k и при $k \rightarrow \infty$ получаем свойство 2. Третье свойство выражает в символической форме тот факт, что в последовательностях $\{m_k\}, \{n_k\}$ можно начать отсчёт не с m_0, n_0 , а, например, с m_{100}, n_{100} или с m_{1000}, n_{1000} и получить в результате тот же самый предел. Четвёртое свойство — самое интересное из всех: оно показывает, что $\text{AGM}(m_0, n_0)$ является однородной функцией первой степени.¹ Это, конечно же, следствие того, что $\frac{m+n}{2}$ и \sqrt{mn} — однородные функции первой степени.

Введём обозначения:

$$x_k = \frac{n_k}{m_k}, \quad y_k = \frac{1}{\text{AGM}(1, x_k)}.$$

Тогда

$$x_{k+1} = \frac{n_{k+1}}{m_{k+1}} = \frac{2\sqrt{m_k n_k}}{m_k + n_k} = \frac{2\sqrt{n_k/m_k}}{1 + n_k/m_k} = \frac{2\sqrt{x_k}}{1 + x_k}$$

и

$$\frac{dx_{k+1}}{dx_k} = \frac{1 - x_k}{(1 + x_k)^2 \sqrt{x_k}} = \frac{(1 + x_k)^2}{2} \frac{x_{k+1} - x_{k+1}^3}{x_k - x_k^3}. \quad (26)$$

¹ По определению, функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется однородной функцией степени α , если для любой константы $c \geq 0$ выполняется тождество

$$f(cx_1, cx_2, \dots, cx_n) \equiv c^\alpha f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Если это тождество продифференцировать по c и затем положить $c = 1$, то получится уравнение, которому удовлетворяет любая гладкая однородная функция степени α :

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = \alpha f.$$

Примеры однородных функций: $f(x, y) = x^3 + y^3$, $f(x, y, z) = x + y + z$, $f(x, y) = \sqrt[3]{x^4 + 3x^2y^2 + y^4}$, $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $f(x, y, z) = \frac{x + y}{y + z}$. Их степени $\alpha = 3, 1, \frac{4}{3}, -1$ и 0 соответственно.

Зависимости между x_k и x_{k+1} (и алгебраическая, и дифференциальная) найдены. Найдём теперь зависимость между y_k и y_{k+1} . Так как

$$\text{AGM}(m_k, n_k) = \text{AGM}\left(m_k \cdot 1, m_k \cdot \frac{n_k}{m_k}\right) = m_k \cdot \text{AGM}\left(1, \frac{n_k}{m_k}\right) = \frac{m_k}{y_k},$$

то, в силу свойства 3,

$$\frac{m_k}{y_k} = \frac{m_{k+1}}{y_{k+1}} \quad \text{или} \quad y_k = \frac{m_k}{m_{k+1}} y_{k+1} = \frac{2m_k}{m_k + n_k} y_{k+1} = \frac{2y_{k+1}}{1 + n_k/m_k} = \frac{2y_{k+1}}{1 + x_k}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{dy_k}{dx_k} &= 2y_{k+1} \frac{d}{dx_k} \left(\frac{1}{1 + x_k} \right) + \frac{2}{1 + x_k} \frac{dy_{k+1}}{dx_k} = -2 \frac{y_{k+1}}{(1 + x_k)^2} + \frac{2}{1 + x_k} \frac{dy_{k+1}}{dx_{k+1}} \frac{dx_{k+1}}{dx_k} = \\ &= -2 \frac{y_{k+1}}{(1 + x_k)^2} + \frac{2}{1 + x_k} \frac{(1 + x_k)^2}{2} \frac{x_{k+1} - x_{k+1}^3}{x_k - x_k^3} \frac{dy_{k+1}}{dx_{k+1}} \Rightarrow \\ (x_k - x_k^3) \frac{dy_k}{dx_k} &= -2 \frac{x_k(1 - x_k)}{1 + x_k} y_{k+1} + (1 + x_k)(x_{k+1} - x_{k+1}^3) \frac{dy_{k+1}}{dx_{k+1}}. \end{aligned}$$

Продифференцируем это равенство по x_k :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_k} \left((x_k - x_k^3) \frac{dy_k}{dx_k} \right) &= -2 \frac{d}{dx_k} \left(\frac{x_k(1 - x_k)}{1 + x_k} \right) y_{k+1} - 2 \frac{x_k(1 - x_k)}{1 + x_k} \frac{dy_{k+1}}{dx_{k+1}} \frac{dx_{k+1}}{dx_k} + \\ &+ (x_{k+1} - x_{k+1}^3) \frac{dy_{k+1}}{dx_{k+1}} + (1 + x_k) \frac{d}{dx_{k+1}} \left((x_{k+1} - x_{k+1}^3) \frac{dy_{k+1}}{dx_{k+1}} \right) \frac{dx_{k+1}}{dx_k} \ominus \end{aligned}$$

Преобразуем немного слагаемые в правой части. Сначала первое слагаемое:

$$\begin{aligned} -2 \frac{d}{dx_k} \left(\frac{x_k(1 - x_k)}{1 + x_k} \right) y_{k+1} &= -2 \left(\frac{1 - 2x_k - x_k^2}{(1 + x_k)^2} \right) y_{k+1} = \\ &= -2 \left(\frac{1 - x_k}{(1 + x_k)^2} + \frac{-x_k - x_k^2}{(1 + x_k)^2} \right) y_{k+1} = -\frac{1 - x_k}{(1 + x_k)\sqrt{x_k}} \frac{2\sqrt{x_k}}{1 + x_k} y_{k+1} + x_k \frac{2y_{k+1}}{1 + x_k} = \\ &= -\frac{1 - x_k}{(1 + x_k)\sqrt{x_k}} x_{k+1} y_{k+1} + x_k y_k. \end{aligned}$$

Теперь упростим сумму второго и третьего слагаемых:

$$\begin{aligned} -2 \frac{x_k(1 - x_k)}{1 + x_k} \frac{dy_{k+1}}{dx_{k+1}} \frac{dx_{k+1}}{dx_k} + (x_{k+1} - x_{k+1}^3) \frac{dy_{k+1}}{dx_{k+1}} &= \\ &= -2 \frac{x_k(1 - x_k)}{1 + x_k} \frac{dy_{k+1}}{dx_{k+1}} \frac{(1 + x_k)^2}{2} \frac{x_{k+1} - x_{k+1}^3}{x_k - x_k^3} + (x_{k+1} - x_{k+1}^3) \frac{dy_{k+1}}{dx_{k+1}} = \\ &= (x_{k+1} - x_{k+1}^3) \frac{dy_{k+1}}{dx_{k+1}} \left(-\frac{x_k(1 - x_k)(1 + x_k)}{x_k - x_k^3} + 1 \right) = 0. \end{aligned}$$

В четвёртом слагаемом только заменим $\frac{dx_{k+1}}{dx_k}$ на $\frac{1-x_k}{(1+x_k)^2\sqrt{x_k}}$. Тогда

$$\ominus x_k y_k + \frac{1-x_k}{(1+x_k)\sqrt{x_k}} \left\{ \frac{d}{dx_{k+1}} \left((x_{k+1} - x_{k+1}^3) \frac{dy_{k+1}}{dx_{k+1}} \right) - x_{k+1} y_{k+1} \right\}$$

или, окончательно,

$$\frac{d}{dx_k} \left((x_k - x_k^3) \frac{dy_k}{dx_k} \right) - x_k y_k = \frac{1-x_k}{(1+x_k)\sqrt{x_k}} \left\{ \frac{d}{dx_{k+1}} \left((x_{k+1} - x_{k+1}^3) \frac{dy_{k+1}}{dx_{k+1}} \right) - x_{k+1} y_{k+1} \right\}.$$

Это самый важный момент в рассуждениях Борхардта: выражение слева и выражение в фигурных скобках справа одинаковы с точностью до замены $k \rightarrow k+1$. Поэтому можно раскручивать это равенство, начиная с $k=0$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_0} \left((x_0 - x_0^3) \frac{dy_0}{dx_0} \right) - x_0 y_0 &= \frac{1-x_0}{(1+x_0)\sqrt{x_0}} \cdot \left\{ \frac{d}{dx_1} \left((x_1 - x_1^3) \frac{dy_1}{dx_1} \right) - x_1 y_1 \right\} = \\ &= \frac{1-x_0}{(1+x_0)\sqrt{x_0}} \frac{1-x_1}{(1+x_1)\sqrt{x_1}} \cdot \left\{ \frac{d}{dx_2} \left((x_2 - x_2^3) \frac{dy_2}{dx_2} \right) - x_2 y_2 \right\} = \dots = \\ &= \prod_{k=0}^{K-1} \frac{1-x_k}{(1+x_k)\sqrt{x_k}} \cdot \left\{ \frac{d}{dx_K} \left((x_K - x_K^3) \frac{dy_K}{dx_K} \right) - x_K y_K \right\}. \end{aligned} \quad (27)$$

Посмотрим, что нас ожидает, если мы захотим в правой части перейти к пределу при $K \rightarrow \infty$.

Для произведения всё просто: по определению, $x_k = \frac{n_k}{m_k}$, где $\{n_k\} \nearrow \text{AGM}(m_0, n_0)$ и $\{m_k\} \searrow \text{AGM}(m_0, n_0)$ при $k \rightarrow \infty$. Поэтому последовательность $\{x_k\}$ монотонно возрастает и в пределе стремится к 1. Таким образом,

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^{K-1} \frac{1-x_k}{(1+x_k)\sqrt{x_k}} = 0.$$

Для фигурной скобки всё несколько сложнее, т.к. мы слишком мало знаем о свойствах функции $y_K(x_K)$, чтобы считать ограниченным предел этой фигурной скобки при $K \rightarrow \infty$. Конечно, слагаемое $x_K y_K$ ограничено,¹ но что можно сказать о производной $\frac{dy_K}{dx_K}$, а тем более второй производной? А вдруг функция $y_K(x_K)$ ведёт себя как $\text{W}\text{W}\text{W}\text{W}\text{W}$ или $\sin \frac{K!}{1-x_K}$? То есть сама-то она ограничена, но её производная такова, что вполне может побороться с произведением и воспрепятствовать, в итоге, общему стремлению к нулю.

На самом деле всё обстоит хорошо, поскольку можно доказать ещё два свойства арифметико-геометрического среднего:

5. $\text{AGM}(1, x)$ — монотонно возрастающая функция;
6. $\text{AGM}(1, x)$ — выпуклая функция.

¹ Так как $\{x_k\}$ монотонно возрастает, то $\frac{n_0}{m_0} < x_k < 1$. В свою очередь, $y_k = \frac{1}{\text{AGM}(1, x_k)}$, а поскольку $n_0 \leq \text{AGM}(m_0, n_0) \leq m_0$, то $x_k \leq \frac{1}{y_k} \leq 1$ и, как следствие, $x_k y_k \in [0, 1]$.

Докажем свойство 5. Пусть $\alpha < \beta$. Организуем соответствующие последовательности $\{m_k\}$, $\{n_k\}$ для $\text{AGM}(1, \alpha)$ и $\text{AGM}(1, \beta)$. При этом, чтобы не путаться, к какому AGM эти последовательности относятся, будем обозначать их члены как $m_k(\alpha)$, $n_k(\alpha)$ и $m_k(\beta)$, $n_k(\beta)$. На первом шаге

$$\text{AGM}(1, \alpha) : \quad m_1(\alpha) = \frac{1 + \alpha}{2}, \quad n_1(\alpha) = \sqrt{\alpha};$$

$$\text{AGM}(1, \beta) : \quad m_1(\beta) = \frac{1 + \beta}{2}, \quad n_1(\beta) = \sqrt{\beta}.$$

Таким образом, $m_1(\alpha) < m_1(\beta)$ и $n_1(\alpha) < n_1(\beta)$. Далее, опираясь на эти неравенства, делаем второй шаг:

$$m_2(\alpha) = \frac{m_1(\alpha) + n_1(\alpha)}{2} < \frac{m_1(\beta) + n_1(\beta)}{2} = m_2(\beta),$$

$$n_2(\alpha) = \sqrt{m_1(\alpha)n_1(\alpha)} < \sqrt{m_1(\beta)n_1(\beta)} = n_2(\beta).$$

Продолжая этот незамысловатый ход рассуждений, получаем, что для всех k

$$m_k(\alpha) < m_k(\beta), \quad n_k(\alpha) < n_k(\beta).$$

Наконец, переходя в этих неравенствах к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем требуемое свойство монотонности для AGM :

$$\text{AGM}(1, \alpha) \leq \text{AGM}(1, \beta), \quad \text{если } \alpha < \beta.$$

Теперь свойство 6. Выпуклость AGM означает, что надо проверить выполнение неравенства

$$\text{AGM}\left(1, \frac{\alpha + \beta}{2}\right) \geq \frac{\text{AGM}(1, \alpha) + \text{AGM}(1, \beta)}{2}$$

для любых α, β . Опять рассмотрим члены соответствующих последовательностей. Для AGM слева это обычные $m_k\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$, $n_k\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$. Для полусуммы AGM 'ов справа надо рассматривать $\frac{m_k(\alpha) + m_k(\beta)}{2}$ и $\frac{n_k(\alpha) + n_k(\beta)}{2}$. При $k = 1$

$$m_1\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \frac{1 + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{2} = \frac{2 + \alpha + \beta}{4}, \quad n_1\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{\alpha + \beta}{2}};$$

$$\frac{m_1(\alpha) + m_1(\beta)}{2} = \frac{\frac{1}{2}(1 + \alpha) + \frac{1}{2}(1 + \beta)}{2} = \frac{2 + \alpha + \beta}{4}, \quad \frac{n_1(\alpha) + n_1(\beta)}{2} = \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{2}.$$

Хотя m -члены и равны, но для n -членов

$$\begin{aligned} n_1\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) &= \sqrt{\frac{\alpha + \beta}{2}} = \frac{\sqrt{\alpha + (\alpha + \beta) + \beta}}{2} \geq \frac{\sqrt{\alpha + 2\sqrt{\alpha\beta} + \beta}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2}}{2} = \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{2} = \frac{n_1(\alpha) + n_1(\beta)}{2} \end{aligned}$$

есть неравенство, и этого неравенства вполне хватит для достижения нашей цели.

При $k = 2$ выполняются уже оба неравенства:

$$\begin{aligned} m_2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) &= \frac{1}{2} \left[m_1\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + n_1\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \right] \geq \frac{1}{2} \left[\frac{m_1(\alpha) + m_1(\beta)}{2} + \frac{n_1(\alpha) + n_1(\beta)}{2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{m_1(\alpha) + n_1(\alpha)}{2} + \frac{m_1(\beta) + n_1(\beta)}{2} \right] = \frac{1}{2} [m_2(\alpha) + m_2(\beta)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) &= \sqrt{m_1\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) n_1\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)} \geq \sqrt{\frac{m_1(\alpha) + m_1(\beta)}{2} \cdot \frac{n_1(\alpha) + n_1(\beta)}{2}} \geq \\ &\geq \sqrt{\frac{n_1(\alpha) + n_1(\beta)}{2} \cdot \frac{n_1(\alpha) + n_1(\beta)}{2}} = \frac{n_1(\alpha) + n_1(\beta)}{2}, \end{aligned}$$

и это положение сохраняется и в дальнейшем:

$$m_k\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \geq \frac{m_k(\alpha) + m_k(\beta)}{2}, \quad n_k\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \geq \frac{n_k(\alpha) + n_k(\beta)}{2}.$$

Переходим к пределу и выпуклость функции $\text{AGM}(1, x)$ доказана.

Таким образом, $\text{AGM}(1, x)$ не имеет патологий. Поэтому и функция $y_k(x_k)$, и её производные ограничены. Значит, фигурная скобка в (27) ограничена и при $K \rightarrow \infty$ получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dx_0} \left((x_0 - x_0^3) \frac{dy_0}{dx_0} \right) - x_0 y_0 = 0 \quad (28)$$

или

$$(x_0 - x_0^3) \frac{d^2 y_0}{dx_0^2} + (1 - 3x_0^2) \frac{dy_0}{dx_0} - x_0 y_0 = 0. \quad (28')$$

Осталось только добавить начальные условия, чтобы из множества решений выбрать решение, соответствующее нашей исходной задаче. Для этого выпишем ещё раз аргумент $x_0 = \frac{n_0}{m_0}$, функцию $y_0(x_0) = \frac{1}{\text{AGM}(1, x_0)}$ и предельное значение $\text{AGM}(m_0, n_0) = m_0 \text{AGM}(1, x_0)$, которое мы ищем, и рассмотрим те случаи, для которых $\text{AGM}(m_0, n_0)$ мы уже знаем. Вообще-то, выбор у нас небольшой:

- 1) $\text{AGM}(m_0, m_0) = m_0 \Rightarrow y_0(1) = 1;$
- 2) $\text{AGM}(m_0, 0) = 0 \Rightarrow y_0(0) = +\infty.$

Поэтому $y_0(1) = 1$ — единственная возможность. Если подставить значения $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ в уравнение (28'), то автоматически получается уже другая единственная возможность:¹ $y'_0(1) = -\frac{1}{2}$.

¹ Такой жёсткий выбор связан, конечно же, с тем, что выражение $(x_0 - x_0^3)$, находящееся в качестве коэффициента перед второй производной в уравнении (28'), зануляется в точке $x_0 = 1$. Переход к нормальной системе уравнений

$$\frac{d}{dx_0} \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'_0 \\ \frac{1}{1 - x_0^2} y_0 - \frac{1 - 3x_0^2}{x_0 - x_0^3} y'_0 \end{pmatrix}$$

показывает, что вектор-функция в правой части не является непрерывной в окрестности точки $(x_0, y_0(x_0), y'_0(x_0))$, если $x_0 = 1$. Поэтому нельзя ожидать существования и единственности решения задачи Коши для произвольных начальных данных $y_0(1), y'_0(1)$.

Теперь можно заняться полученным дифференциальным уравнением. При этом проще исходить из «свёрнутой» формы (28), убрав на время мешающие нулевые индексы:

$$\frac{d}{dx} \left((x - x^3) \frac{dy}{dx} \right) - xy = 0.$$

Решение начнём с того, что разделим всё на x :

$$\begin{aligned} \frac{d}{x dx} \left(x(1 - x^2) \frac{dy}{dx} \right) - y = 0 &\Rightarrow \frac{d}{x dx} \left(x^2(1 - x^2) \frac{dy}{x dx} \right) - y = 0 \Rightarrow \\ \frac{d}{2x dx} \left(x^2(1 - x^2) \frac{dy}{2x dx} \right) - \frac{y}{4} = 0 &\Rightarrow \frac{d}{d(x^2)} \left(x^2(1 - x^2) \frac{dy}{d(x^2)} \right) - \frac{y}{4} = 0. \end{aligned}$$

Напрашивается замена $t = x^2$. Сделаем её:

$$\frac{d}{dt} \left(t(1 - t) \frac{dy}{dt} \right) - \frac{y}{4} = 0. \quad (29)$$

Итак, теперь нам надо искать решение уравнения (29). Будем искать его в виде ряда. Поскольку начальное условие $y|_{x=1} = 1$ переходит в $y|_{t=1} = 1$, то ряд будет следующим:

$$y(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^n y}{dt^n} \Big|_{t=1} \cdot \frac{(t-1)^n}{n!}.$$

Чтобы найти производные $y^{(n)}(1)$, подействуем оператором $\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}$ на уравнение (29):

$$\frac{d^n}{dt^n} \left(t(1 - t) \frac{dy}{dt} \right) - \frac{1}{4} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} = 0. \quad (30)$$

Для упрощения первого слагаемого воспользуемся формулой Лейбница

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

Если $u(t)$ — квадратичная функция, $u(t) = at^2 + bt + c$, то все её производные, начиная с третьей, равны нулю. Поэтому

$$(uv)^{(n)} = uv^{(n)} + nu'v^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2} u''v^{(n-2)}.$$

Применительно к (30) это означает, что

$$t(1-t)y^{(n+1)}(t) + n(1-2t)y^{(n)}(t) + \frac{n(n-1)}{2}(-2)y^{(n-1)}(t) - \frac{1}{4}y^{(n-1)}(t) = 0.$$

Подставляем теперь сюда $t = 1$ и получаем соотношение между $y^{(n)}(1)$ и $y^{(n-1)}(1)$:

$$-ny^{(n)}(1) - n(n-1)y^{(n-1)}(1) - \frac{1}{4}y^{(n-1)}(1) = 0 \Rightarrow y^{(n)}(1) = -y^{(n-1)}(1) \frac{(2n-1)^2}{4n}.$$

$$\frac{y^{(n)}(1)}{y^{(n-1)}(1)} = -\frac{(2n-1)^2}{4n} \Rightarrow \prod_{n=1}^N \frac{y^{(n)}(1)}{y^{(n-1)}(1)} = \prod_{n=1}^N \left(-\frac{(2n-1)^2}{4n}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{y^{(N)}(1)}{y(1)} = (-1)^N \frac{(2N-1)!!^2}{4^N N!} \Rightarrow y^{(N)}(1) = (-1)^N \frac{(2N-1)!!^2}{4^N N!}.$$

Таким образом,

$$y(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!^2}{4^n n!} \frac{(t-1)^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!^2}{(2n)!!^2} (1-t)^n.$$

Меняем t на x^2 :¹

$$y(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!^2}{(2n)!!^2} (1-x^2)^n,$$

опять расставляем по своим местам нулевые индексы и, вспоминая формулу (22), получаем равенство

$$y_0(x_0) = \frac{2}{\pi} K(\sqrt{1-x_0^2}) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-(1-x_0^2)\sin^2\varphi}}.$$

И наконец, возвращаясь от x_0, y_0 к m_0, n_0 , окончательно находим, что последовательности $\{m_k\}, \{n_k\}$ сходятся к пределу

$$\text{AGM}(m_0, n_0) = \frac{\pi/2}{\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{m_0^2 \cos^2\varphi + n_0^2 \sin^2\varphi}}}.$$

Другой способ нахождения $\text{AGM}(m_0, n_0)$, основанный на преобразовании Ландена, можно найти у Фихтенгольца во втором томе. Также интересно отметить, что быстрая сходимость последовательностей $\{m_k\}, \{n_k\}$ к своему общему пределу послужила основой для эффективного алгоритма вычисления эллиптического интеграла $K(k)$ (см., например, книгу Никлауса Вирта «Алгоритмы и структуры данных» (М., Мир, 1989)).

Кстати, формулы Ингама (24) были получены реализацией именно этого алгоритма. Если взять начальные значения $n_0 = \cos \frac{\alpha}{2}, m_0 = 1$, то обе формулы (без δ) имеют вид $T \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{1}{m_2}$ и $T \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{1}{m_3}$. Насколько хороши дроби $\frac{1}{m_2}$ и $\frac{1}{m_3}$ для приближения точной формулы (23) можно увидеть, если разложить все выражения в ряд по степеням α в нуле. Тогда

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!^2}{(2n)!!^2} \sin^{2n} \frac{\alpha}{2} = 1 + \frac{1}{16} \alpha^2 + \frac{11}{3072} \alpha^4 + \frac{173}{737280} \alpha^6 + \frac{2827}{165150720} \alpha^8 + \dots,$$

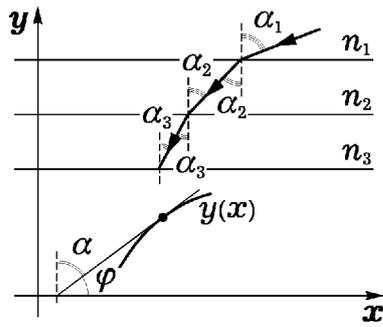
а ряды для $\frac{1}{m_2}$ и $\frac{1}{m_3}$ совпадают с данным рядом вплоть до α^6 и α^{14} включительно.

¹ Я надеюсь, никто не возражает против такого вольного использования одной буквы y для обозначения двух функций, $y(x)$ и $y(t)$, поскольку x и t — не независимые переменные. Дотошные люди, конечно, всегда могут меня поймать, спросив: «А что такое $y(\frac{1}{2})$?».

Распространение света в нелинейной среде

Найти траектории световых лучей в верхней полуплоскости, если коэффициент преломления меняется по закону $n(y) = n_0/y$.

Решение. При прохождении света через границу раздела двух сред выполняется закон преломления (закон Снеллиуса):



$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad \text{или} \quad n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2,$$

где α_1 — угол падения, α_2 — угол преломления, n_1, n_2 — показатели преломления сред относительно вакуума.

Если представить теперь неоднородную среду, заполняющую верхнюю полуплоскость, как бесконечное число горизонтально расположенных бесконечно тонких слоёв, то закон преломления можно записать в виде

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2 = n_3 \sin \alpha_3 = \dots = \text{const} \quad \Rightarrow \quad n \sin \alpha = \text{const}.$$

Переходим от угла падения α к углу наклона $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$, используем геометрический смысл производной, $\text{tg } \varphi = y'$, и получаем дифференциальное уравнение для траекторий, по которым движется свет в нелинейной среде:

$$n \sin \alpha = n \sin \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = n \cos \varphi = \frac{n}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \varphi}} = \frac{n}{\sqrt{1 + (y')^2}} = \text{const} \quad \Rightarrow$$

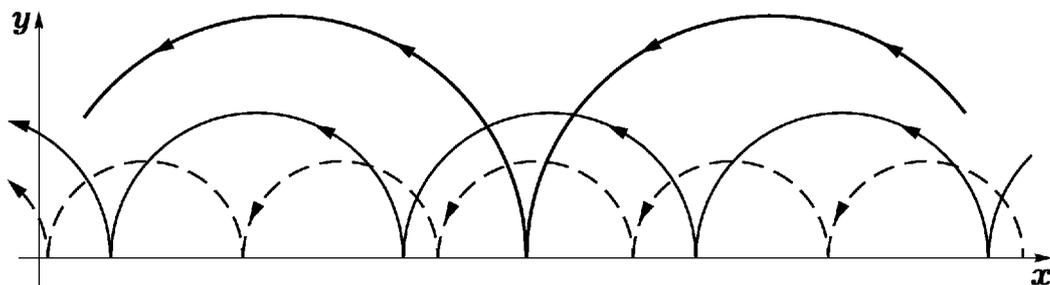
$$1 + (y')^2 = C^2 n^2. \quad (31)$$

По условиям задачи $n(y) = n_0/y$. Поэтому, не изменяя общности переобозначением константы $Cn_0 \rightarrow C$,

$$1 + (y')^2 = \frac{C^2}{y^2} \quad \Rightarrow \quad (y')^2 = \frac{C^2}{y^2} - 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{C^2 - y^2}}{y} \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{y}{\sqrt{C^2 - y^2}} dy = \pm \int dx \quad \Rightarrow \quad -\sqrt{C^2 - y^2} = \pm(x + C_1) \quad \Rightarrow \quad (x + C_1)^2 + y^2 = C^2.$$

Это множество полуокружностей, поскольку всё дело происходит в верхней полуплоскости.



Обсудим ещё два случая $n(y)$.

1. Если $n(y) = n_0 y$, то $1 + (y')^2 = C^2 y^2$. Это уравнение можно разрешить относительно производной, затем разделить переменные и проинтегрировать:

$$y' = \pm \sqrt{C^2 y^2 - 1} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{C^2 y^2 - 1}} = \pm dx \Rightarrow \int \frac{C dy}{\sqrt{(Cy)^2 - 1}} = \pm C \int dx \Rightarrow \ln |Cy + \sqrt{(Cy)^2 - 1}| = \pm(Cx + C_1).$$

После этого надо потратить некоторое время на алгебраические преобразования, которые в итоге приведут к решению $y(x) = \frac{1}{C} \operatorname{ch}(Cx + C_1)$, $C > 0$, т.е. свет распространяется по цепным линиям.

Тот же ответ можно получить быстрее, если искать решение в параметрическом виде: $x = x(p)$, $y = y(p)$, а к явному виду $y = y(x)$ перейти на последнем шаге. Пусть $y' = p$. Тогда $y = \frac{\sqrt{1+p^2}}{C}$. Специфический вид зависимости $y(p)$ говорит о том, что вместо p лучше использовать тангенс или гиперболический синус. Последний вариант предпочтительнее, т.к. p находится только под квадратным корнем. Итак, $p = \operatorname{sh} q \Rightarrow y(q) = \frac{\operatorname{ch} q}{C}$. Теперь находим $x(q)$:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sh} q \Rightarrow dx = \frac{dy}{\operatorname{sh} q} = \frac{1}{\operatorname{sh} q} d\left(\frac{\operatorname{ch} q}{C}\right) = \frac{dq}{C} \Rightarrow x(q) = \frac{q}{C} - C_1$$

и, объединяя зависимости $x(q)$, $y(q)$, получаем $y(x) = \frac{1}{C} \operatorname{ch}(Cx + C_1)$.

Из-за нелинейного вхождения производной в исходное уравнение, его надо проверить на особые решения. В случае общего уравнения $F(x, y, y') = 0$ это означает, что в системе

$$F(x, y, y') = 0, \quad \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0$$

надо избавиться от y' и получившуюся *дискриминантную кривую* $y_s(x)$ проверить, что, во-первых, она является решением; а, во-вторых, в каждой точке x_0 она касается какого-то другого решения уравнения $F(x, y, y') = 0$. В данном конкретном случае $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \Leftrightarrow y' = 0 \Rightarrow$ Получаем два решения $y_s(x) = \pm \frac{1}{C}$, из которых надо выбрать только плюсовое, т.к. функция y должна быть положительной.

Приравнивание функций $y_s(x) = \frac{1}{C}$, $y(x) = \frac{1}{C} \operatorname{ch}(Cx + C_1)$ в точке x_0 даёт равенство $Cx_0 + C_1 = 0$. Такое же равенство получается из приравнивания производных. Таким образом, для любой точки x_0 решение $y_s(x) = \frac{1}{C}$ касается решения $y(x) = \frac{1}{C} \operatorname{ch}(C(x - x_0))$ и, следовательно, является особым.

2. Если $n(y) = \frac{n_0}{\sqrt{y_0 - y}}$, то $1 + (y')^2 = \frac{C^2}{y_0 - y}$. И здесь ищем решение в параметрическом виде. В качестве параметра берём $p = y'$. Зависимость $y(p)$ находим сразу: $y = y_0 - \frac{C^2}{1 + p^2}$. Теперь ищем зависимость $x(p)$:

$$\frac{dy}{dx} = p \Rightarrow dx = \frac{dy}{p} = -\frac{C^2}{p} d\left(\frac{1}{1 + p^2}\right) = \frac{2C^2}{(1 + p^2)^2} dp$$

Опять хочется сменить параметр: $p = \operatorname{tg} q$. Тогда $y = y_0 - C^2 \cos^2 q$ и

$$x = 2C^2 \int \frac{dp}{(1 + p^2)^2} = 2C^2 \int \cos^2 q dq = C^2 \int (1 + \cos 2q) dq = C^2 \left(q + \frac{\sin 2q}{2} \right) + C_1.$$

Чисто косметической заменой $2q \rightarrow \pi - t$ можно свести полученное решение к следующему виду:

$$x(t) = C_1 - \frac{1}{2}C^2(t - \sin t), \quad y(t) = y_0 - \frac{1}{2}C^2(1 - \cos t).$$

Таким образом, свет распространяется по циклоидам. Особое решение в данном случае тоже есть — это $y(x) = y_0 - C^2$.

Арнольдский «Тривиум», № 19. Исследовать ход лучей в плоской среде с показателем преломления $n(y) = y^4 - y^2 + 1$, пользуясь законом Снеллиуса $n(y) \sin \alpha = \text{const}$, где α — угол луча с осью y .

Решение. В данном случае уравнение (31) принимает вид

$$1 + (y')^2 = C^2(y^4 - y^2 + 1)^2 \Rightarrow y' = \pm \sqrt{C^2(y^4 - y^2 + 1)^2 - 1} \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{\sqrt{C^2(y^4 - y^2 + 1)^2 - 1}} = \pm dx \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{C^2(y^4 - y^2 + 1)^2 - 1}} = \pm(x + C_1).$$

Устрашающий вид интеграла в левой части заставляет по-новому перечитать формулировку задачи: *исследовать* — это не найти решение аналитически, а нарисовать интегральные кривые с помощью метода изоклин.

Вспомним основные положения этого метода. Если имеется диф.уравнение первого порядка, записанное в нормальной форме,

$$y' = f(x, y), \quad (32)$$

где $f(x, y)$ — непрерывная по x и непрерывно дифференцируемая по y функция, то кривая $f(x, y) = k$ называется изоклиной уравнения (32). Если интегральная кривая (т.е. решение $y = y(x, C)$ уравнения (32)) и изоклина $f(x, y) = k$ пересекаются в некоторой точке (x_0, y_0) , то выполняется двойное равенство $y'(x_0, C) = k = f(x_0, y_0)$. Это означает, что угол наклона интегральной кривой к оси Ox в такой точке равен $\varphi = \text{arctg } k$ (т.к. $\text{tg } \varphi = y'$).¹ Изоклина $f(x, y) = 0$ занимает особое место среди всех других: на ней лежат точки экстремума интегральных кривых.

Ещё одна полезная кривая — это

$$y'' = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f = 0.$$

На ней расположены все точки перегиба интегральных кривых, а сама кривая $f'_x + f f'_y = 0$ разделяет плоскость (x, y) на области выпуклости и вогнутости интегральных кривых.²

¹ Единственное возможное исключение — это когда какая-то изоклина $f(x, y) = k_0$ сама является решением уравнения (32). Тогда с неё снимается почётное звание изоклины и взамен присваивается титул интегральной кривой. В силу теоремы существования и единственности решения задачи Коши никакая другая интегральная кривая не может пересечь кривую $f(x, y) = k_0$. Как следствие, у этих интегральных кривых не бывает угла наклона $\text{arctg } k_0$. Пример: для уравнения $y' = x + y$ изоклины это прямые $x + y = k \Leftrightarrow y = -x + k$. Если подставить это выражение в уравнение, то получится $-1 = k$. Таким образом, $y = -x - 1$ является интегральной кривой, а все остальные интегральные кривые никогда не будут иметь угол наклона с осью абсцисс, равный -45° .

² Не исключён, конечно, вариант, что $f'_x + f f'_y \neq 0$ во всех точках плоскости, т.е. интегральные кривые всюду или выпуклы, или вогнуты. Пример: $f(x, y) = e^{x+y}$.

Как правило, построение семейства изоклин $f(x, y) = k$ начинается с частных случаев $k = 0$, $k = \pm 1$. Затем добавляются другие k , например, $k = \pm \frac{1}{2}$, $k = \pm 2, \dots$ Затем на каждой изоклине рисуются маленькие отрезки под углом $\arctg k$ к оси абсцисс — это отрезки-касательные к интегральным кривым. На заключительном этапе рисования по касательным восстанавливаются сами интегральные кривые.

В нашем случае применение метода изоклин затруднено тем, что дифференциальное уравнение зависит от параметра C , т.е. сначала надо построить семейство изоклин и интегральных кривых для какого-то одного значения C , потом для другого, потом для третьего и наконец свести все построения в общую картину. Отметим ещё, что наличие знака \pm не является моментом, усложняющим жизнь. Если представить уравнение в виде

$$\frac{dy}{d(\pm x)} = \sqrt{C^2(y^4 - y^2 + 1)^2 - 1},$$

то легко видеть, что достаточно нарисовать картину интегральных кривых, соответствующих случаю $+x$. Если эти кривые имеют вид $y = y(x, C, C_0)$, то для случая $-x$ получаются кривые $y = y(-x, C, C_0)$, т.е. общий вид интегральных кривых получается добавлением к множеству $y = y(x, C, C_0)$ его зеркального отражения относительно оси ординат.

Итак, рассмотрим уравнение для случая $+x$:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{C^2(y^4 - y^2 + 1)^2 - 1}. \quad (33)$$

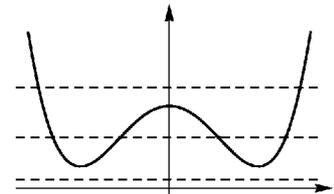
Во-первых, не изменяя общности, можно считать, что $C > 0$.

Во-вторых, функция $y^4 - y^2 + 1$ всегда положительна и достигает минимума, равного $\frac{3}{4}$, при $y^2 = \frac{1}{2}$. Для фиксированного C подкоренное выражение зануляется при

$$y^4 - y^2 + 1 = \frac{1}{C} \quad \Rightarrow \quad y^2 = \frac{1 \pm \sqrt{4/C - 3}}{2} \quad \text{и} \quad 1 - \sqrt{4/C - 3} = 0 \quad \text{при} \quad C = 1.$$

Следовательно, если $0 < C < 1$, то биквадратное уравнение имеет два решения; если $1 < C < \frac{4}{3}$, то четыре; если $C > \frac{4}{3}$, то ни одного. Видимо, придётся рассмотреть уравнение (33) для каждого из трёх вариантов, например, $C = \frac{4}{5}$, $C = \frac{11}{9}$ и $C = \sqrt{2}$.

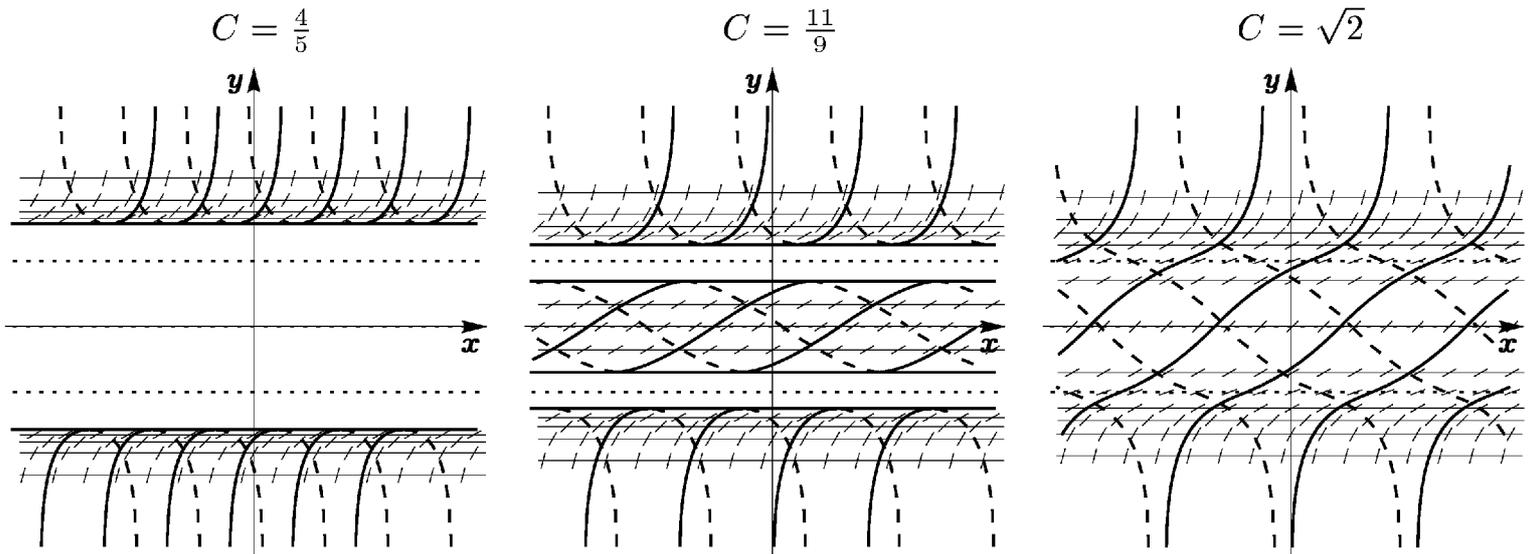
В-третьих, отметим, что функция $f(x, y) = \sqrt{C^2(y^4 - y^2 + 1)^2 - 1}$ зависит только от y , поэтому изоклины $f(x, y) = k$ — это горизонтальные прямые $y = C_0$. Проверим, нет ли среди них интегральных кривых. Подставляем $y = C_0$ в уравнение (33). Слева получается 0, справа — наш квадратный корень, занулением которого мы только что занимались. Значит, для случая $0 < C < 1$ среди интегральных кривых будет две горизонтальных прямых, а для случая $1 < C < \frac{4}{3}$ их будет четыре. Ещё одно следствие: $f(x, y) = 0$ — это не изоклина, поэтому все остальные интегральные кривые не имеют точек экстремума. Более того, квадратный корень в (33) для таких кривых — величина положительная, поэтому $y'(x) > 0$, а функции $y(x)$ с ростом x монотонно возрастают. Наконец, поскольку интеграл $\int \frac{dy}{\sqrt{C^2(y^4 - y^2 + 1)^2 - 1}}$ сходится, то интегральные кривые, уходящие на $\pm\infty$ по y , имеют вертикальные асимптоты.



В-четвёртых, функция $f(x, y) = \sqrt{C^2(y^4 - y^2 + 1)^2 - 1}$ непрерывна по y , но не дифференцируема в тех точках, где зануляется квадратный корень. Поэтому не исключено, что в таких случаях единственности решения не будет. Учитывая рассмотренные выше случаи нелинейных сред, закрадывается подозрение, что эти горизонтальные прямые будут особыми решениями.

В-пятых, все точки перегиба интегральных кривых расположены на кривой $f'_x + ff'_y = 0 \Leftrightarrow ff'_y = \frac{1}{2}(f^2)'_y = C^2(y^4 - y^2 + 1)(4y^3 - 2y) = 0$, т.е. $y = 0$ и $y^2 = \frac{1}{2}$.

Ну, пожалуй, сказано было достаточно. Берём в руки карандаш и переводим все слова и формулы в графический вид. Итоги следующие:



Здесь тонкие горизонтальные прямые — это изоклины (отрезки на них показывают угол наклона). Все толстые линии — это интегральные кривые. Среди них есть горизонтальные прямые, сплошные кривые (они соответствуют случаю $+x$) и штрихованные кривые (они соответствуют случаю $-x$). Линии из точек — это места перегиба интегральных кривых.

Ещё одно замечание. Реальный физический коэффициент преломления $n(y)$ не может быть меньше единицы, т.е. $y^4 - y^2 + 1 \geq 1$. Разберите самостоятельно, как такое ограничение повлияет на построенные картинки.

НЕБОЛЬШОЕ ОТСТУПЛЕНИЕ

Рассмотрим вопрос о распространении света в плоской среде с показателем преломления $n(y)$ чуть подробнее. Принцип Ферма утверждает, что из всех мыслимых путей, соединяющих две точки (к примеру, A и B), свет выбирает такой, который он проходит за минимальное время. Если показатель преломления $n(y)$ не зависит от длины волны падающего света, то скорость распространения света в среде равна $\frac{c}{n(y)}$, где c — скорость света в вакууме. Пусть за время dt свет проходит расстояние dl . Тогда

$dt = \frac{dl}{c/n(y)}$. Если выбрать какой-то путь $y = y(x)$, соединяющий точки A и B , то время прохождения данного пути будет равно криволинейному интегралу

$$t = \int_{AB} \frac{dl}{c/n(y)} = \frac{1}{c} \int_{AB} n(y) dl \quad (\ominus)$$

Заменяем дифференциал длины дуги dl на $\sqrt{1 + y'^2(x)} dx$ и получаем обычный интеграл:

$$\ominus \frac{1}{c} \int_a^b n(y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx. \quad (34)$$

Теперь надо найти такой путь $y = y(x)$, который минимизирует данный функционал. Как известно, при заданных краевых условиях $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$ функционал общего вида

$$\int_a^b F(x, y, y') dx$$

достигает экстремума на функциях $y = y(x)$, удовлетворяющих уравнению Эйлера:

$$\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0.$$

Здесь при взятии частных производных переменные x, y, y' считаются независимыми, а при взятии $\frac{d}{dx}$ переменные y, y' рассматриваются как функции от x . Если подинтегральная функция F зависит от x неявно, $F = F(y, y')$, то для уравнения Эйлера можно организовать понижение порядка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(y, y')}{\partial y} - \left(\frac{\partial^2 F(y, y')}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 F(y, y')}{\partial y'^2} y'' \right) &= 0 \Rightarrow \\ \frac{1}{y'} \frac{d}{dx} \left(F(y, y') - \frac{\partial F(y, y')}{\partial y'} y' \right) &= 0 \Rightarrow F(y, y') - \frac{\partial F(y, y')}{\partial y'} y' = \text{const}. \end{aligned}$$

В случае функционала (34) последнее уравнение принимает вид

$$n(y) \sqrt{1 + y'^2} - n(y) \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} y' = \text{const} \Rightarrow \frac{n(y)}{\sqrt{1 + y'^2}} = \text{const}.$$

Если теперь перейти от производной к углу падения α , то получится уравнение

$$\frac{n(y)}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{n(y)}{\sqrt{1 + \text{tg}^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}} = n(y) \sin \alpha = \text{const}.$$

Таким образом, закон Снеллиуса следует из принципа Ферма. Как говорил Эйлер: «Так как здание всего мира совершенно и возведено премудрым Творцом, то в мире не происходит ничего, в чём не был бы виден смысл какого-нибудь максимума или минимума».¹ И всё же это не значит, что свет «стремится» выбирать кратчайшие пути, он может пойти и по максимальному пути, поскольку уравнение Эйлера — это только уравнение на экстремали и не более. Для лучшего понимания я очень советую прочитать параграфы «Вариационные принципы. Принцип Ферма в оптике» и «Принцип наименьшего действия» в двенадцатой главе книги: Я.Б. Зельдович, А.Д. Мышкис. «Элементы прикладной математики» (М., Наука, 1972).

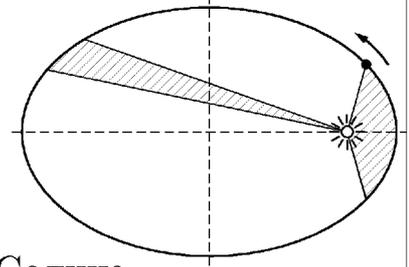
Законы Кеплера

Кеплер занимался астрономией, астрологией и массой других дел (в частности, безуспешно пытался определить закон преломления света, который в 1617 году смог

¹ Вольтер, правда, возражал, что «богу необязательно быть бережливым буржуа, он может хотеть и чтобы его считали щедрым аристократом, не жалеющим средств на усовершенствование мира», но, несмотря на этот остроумный ответ, — «как скучно жить без светлой сказки» — слова Эйлера мне нравятся больше.

найти Снеллиус¹), составлял таблицы движения небесных тел и опытным путём установил следующие законы:

1. орбитой каждой планеты является эллипс, в одном из фокусов которого находится Солнце;
2. радиус-вектор каждой планеты заметает равные площади за равные времена;
3. отношение квадрата времени обращения планеты вокруг Солнца к кубу большей полуоси её эллиптической орбиты одинаково для всех планет.



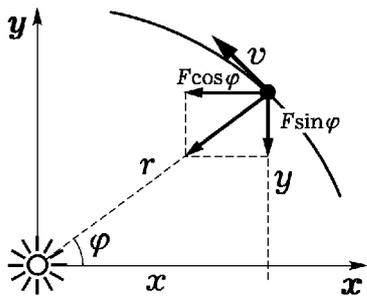
Позднее Ньютон в «Математических началах натуральной философии» (1687) дал теоретическое доказательство законов Кеплера,² опираясь на свой закон всемирного тяготения: любые два тела, находящиеся на расстоянии r друг от друга и имеющие массы m и M соответственно, притягиваются с силой

$$F = G \frac{mM}{r^2},$$

где $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}$ — универсальная гравитационная постоянная.

Основываясь на этом законе, опишем движение планет, считая, что m — масса планеты, движущейся вокруг Солнца, M — масса Солнца. Влияние других планет при этом учитывать не будем.

Пусть Солнце находится в начале координат, а планета в момент времени t находится в точке с текущими координатами x, y . На планету действует только сила притяжения F . Раскладываем её на составляющие, используя второй закон Ньютона и получаем систему уравнений



$$\begin{cases} m\ddot{x} = -F \cos \varphi = -G \frac{mM}{r^2} \cos \varphi, \\ m\ddot{y} = -F \sin \varphi = -G \frac{mM}{r^2} \sin \varphi. \end{cases}$$

Поскольку $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos \varphi = \frac{x}{r}$ и $\sin \varphi = \frac{y}{r}$, то, переходя от полярных координат в правых частях уравнений к декартовым, получим:

$$\ddot{x} = -\frac{kx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad \ddot{y} = -\frac{ky}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad (35)$$

где $k \stackrel{\text{def}}{=} GM$.

Не изменяя общности, можно считать, что момент времени $t = 0$ выбран таким образом, что начальные условия имеют вид

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = v_0. \quad (36)$$

Итак, получилась задача Коши (35)–(36), которую надо решить.

¹ См. очерк В.П. Лишевского «Иоганн Кеплер (1571–1630)» в книге «Замечательные учёные» (М., Наука, 1980; серия «Библиотечка "Квант"», выпуск 9), а также весьма любопытный рассказ о мистических, теологических и астрологических воззрениях Кеплера, которые всё же не мешали ему в его научных достижениях, в пятом параграфе одиннадцатой главы книги: Д. Пойа. «Математика и правдоподобные рассуждения» (М., Наука, 1975).

² О том, как это было сделано, лучше всего прочитать в книге: В.И. Арнольд. «Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук» (М., Наука, 1989), один из параграфов которой называется «Доказал ли Ньютон эллиптичность орбит?».

Вид знаменателя каждого из уравнений системы (35) говорит о том, что зря мы избавлялись от r и φ . Наоборот, надо было избавляться от x, y и записывать систему в полярных координатах. Возвращаемся назад:

$$x = r \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \varphi,$$

$$\dot{x} = r' \cos \varphi + r(\cos \varphi)' = \dot{r} \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \varphi,$$

$$\dot{y} = r' \sin \varphi + r(\sin \varphi)' = \dot{r} \sin \varphi + r\dot{\varphi} \cos \varphi,$$

$$\ddot{x} = r'' \cos \varphi + 2r'(\cos \varphi)' + r(\cos \varphi)'' = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \cos \varphi - (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \sin \varphi,$$

$$\ddot{y} = r'' \sin \varphi + 2r'(\sin \varphi)' + r(\sin \varphi)'' = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \sin \varphi + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \cos \varphi.$$

Здесь на промежуточной стадии были использованы более привычные штрихи вместо точек, а также формула Лейбница для нахождения вторых производных. Подставляем эти выражения в (35)–(36) и получаем дифференциальные уравнения и начальные условия в полярных координатах:

$$\begin{cases} (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \cos \varphi - (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \sin \varphi = -\frac{k \cos \varphi}{r^2}, \\ (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \sin \varphi + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \cos \varphi = -\frac{k \sin \varphi}{r^2}, \end{cases} \quad (37)$$

$$r(0) = x_0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \dot{r}(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = \frac{v_0}{x_0}. \quad (38)$$

Рассматривая систему (37) как алгебраическую систему линейных уравнений относительно скобок $(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)$ и $(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})$, получим, что

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{k}{r^2}, \quad 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0. \quad (37')$$

Эти уравнения гораздо удобнее для исследования, чем первоначальная система (35).

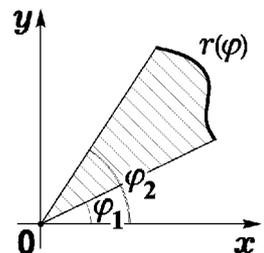
Начнём со второго уравнения. Домножаем его на r , сворачиваем всё в полную производную, интегрируем и используем начальные условия (38):

$$2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2r \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + r^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{const} \quad \Leftrightarrow$$

$$r^2(t)\dot{\varphi}(t) = r^2(0)\dot{\varphi}(0) = x_0 v_0. \quad (39)$$

Если теперь вспомнить формулу площади сектора, заданного в полярных координатах $0 \leq r \leq r(\varphi)$, $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi) d\varphi,$$



то, интегрируя обе части (39) по dt от t_1 до t_2 и полагая $\varphi_1 = \varphi(t_1)$, $\varphi_2 = \varphi(t_2)$, находим

$$\int_{t_1}^{t_2} r^2(t)\dot{\varphi}(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} x_0 v_0 dt \quad \Rightarrow \quad \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(t(\varphi)) d\varphi = x_0 v_0 (t_2 - t_1) \quad \Rightarrow$$

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi) d\varphi = \frac{x_0 v_0}{2} (t_2 - t_1), \quad (40)$$

т.е. каждая из планет движется по плоской кривой относительно Солнца таким образом, что радиус-вектор, связывающий Солнце и планету, заметает равные площади за равные промежутки времени (или, другими словами, секториальная скорость $\frac{dS}{dt}$ постоянна).

Чтобы вывести следующий закон Кеплера, касающийся типа траекторий движения планет, выразим $\dot{\varphi}$ из уравнения (39) и подставим в первое уравнение системы (37'):

$$\dot{\varphi} = \frac{x_0 v_0}{r^2} \Rightarrow \ddot{r} - r \left(\frac{x_0 v_0}{r^2} \right)^2 = -\frac{k}{r^2} \Rightarrow \ddot{r} = \frac{x_0^2 v_0^2}{r^3} - \frac{k}{r^2}.$$

Получившееся уравнение не имеет явной зависимости от t , поэтому замена $p(r) = \dot{r}$ даёт возможность понизить порядок:

$$\ddot{r} = \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \right) = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dr} \frac{dr}{dt} = \frac{dp}{dr} p = \frac{x_0^2 v_0^2}{r^3} - \frac{k}{r^2}$$

или

$$\frac{dp^2}{dr} = \frac{2x_0^2 v_0^2}{r^3} - \frac{2k}{r^2} \Rightarrow dp^2 = \left(\frac{2x_0^2 v_0^2}{r^3} - \frac{2k}{r^2} \right) dr.$$

Интегрируем с использованием начальных условий и получаем уравнение первого порядка:

$$\begin{aligned} \int_0^{\dot{r}} dp^2 &= \int_{x_0}^r \left(\frac{2x_0^2 v_0^2}{r^3} - \frac{2k}{r^2} \right) dr \Rightarrow \dot{r}^2 = -\frac{x_0^2 v_0^2}{r^2} + \frac{x_0^2 v_0^2}{x_0^2} + \frac{2k}{r} - \frac{2k}{x_0} = \\ &= v_0^2 - \frac{2k}{x_0} - \left(\frac{x_0^2 v_0^2}{r^2} - \frac{2k}{r} \right) = \left(v_0 - \frac{k}{x_0 v_0} \right)^2 - \left(\frac{x_0 v_0}{r} - \frac{k}{x_0 v_0} \right)^2 \Rightarrow \\ \dot{r} &= \pm \sqrt{\left(v_0 - \frac{k}{x_0 v_0} \right)^2 - \left(\frac{x_0 v_0}{r} - \frac{k}{x_0 v_0} \right)^2} = \pm \frac{1}{x_0 v_0} \sqrt{(x_0 v_0^2 - k)^2 - \left(\frac{x_0^2 v_0^2}{r} - k \right)^2}. \end{aligned}$$

Если бы мы занялись интегрированием этого уравнения, то получили бы зависимость r от t , а мы хотим получить траекторию движения планеты, т.е. зависимость r от φ . Для такого перехода делим последнее уравнение на уравнение (39):

$$\frac{\dot{r}}{r^2 \dot{\varphi}} = \frac{1}{r^2} \frac{dr/dt}{d\varphi/dt} = \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} = \pm \frac{1}{x_0^2 v_0^2} \sqrt{(x_0 v_0^2 - k)^2 - \left(\frac{x_0^2 v_0^2}{r} - k \right)^2}. \Rightarrow$$

Получилось дифференциальное уравнение для нахождения $r(\varphi)$. Вид подкоренного выражения как разности квадратов требует, чтобы мы рассмотрели два возможных варианта событий: 1) $x_0 v_0^2 = k$ и 2) $x_0 v_0^2 \neq k$.

В первом случае единственный шанс получить что-то вещественно-осмысленное — это занулить скобку $\left(\frac{x_0^2 v_0^2}{r} - k \right)$. Тогда зануляется и производная $\frac{dr}{d\varphi}$. Оба получившихся уравнения не противоречат друг другу и дают в результате $r(\varphi) = \frac{x_0^2 v_0^2}{k}$, т.е. окружность.

Пусть теперь $x_0 v_0^2 \neq k$. Тогда разделяем переменные:

$$-\frac{x_0^2 v_0^2}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{\dots}} = \mp d\varphi \quad \Rightarrow \quad \frac{d\left(\frac{x_0^2 v_0^2}{r} - k\right)}{\sqrt{\dots}} = \mp d\varphi$$

и интегрируем:

$$\int_{x_0}^r \frac{d\left(\frac{x_0^2 v_0^2}{r} - k\right)}{\sqrt{\dots}} = \mp \int_0^\varphi d\varphi \quad \Rightarrow \quad \arcsin \frac{\frac{x_0^2 v_0^2}{r} - k}{|x_0 v_0^2 - k|} \Big|_{x_0}^r = \mp \varphi.$$

При подстановке в арксинус нижнего предела получается $\arcsin(\operatorname{sgn}(x_0 v_0^2 - k)) = \arcsin(\pm 1) = \pm \frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \arcsin \frac{\frac{x_0^2 v_0^2}{r} - k}{|x_0 v_0^2 - k|} = \mp \varphi \pm \frac{\pi}{2} &\quad \Rightarrow \quad \frac{x_0^2 v_0^2}{r} - k = |x_0 v_0^2 - k| \sin\left(\mp \varphi \pm \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= |x_0 v_0^2 - k| \cos(\mp \varphi) \sin\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm |x_0 v_0^2 - k| \cos \varphi = (x_0 v_0^2 - k) \cos \varphi, \end{aligned}$$

и мы, наконец, получаем зависимость r от φ :

$$r = \frac{\frac{x_0^2 v_0^2}{k}}{1 + \left(\frac{x_0 v_0^2}{k} - 1\right) \cos \varphi}. \quad (41)$$

Заметим, что эта формула, найденная в предположении $x_0 v_0^2 \neq k$, содержит в себе решение и для случая $x_0 v_0^2 = k$. Поэтому равенство (41) — это общий ответ.

Из аналитической геометрии известно, что $r = \frac{r_0}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$ — это уравнение в полярных координатах конического сечения, имеющего эксцентриситет ε . При этом возможны следующие случаи:

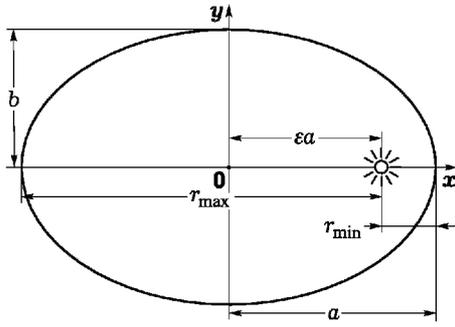
1. эллипс, если $0 \leq \varepsilon < 1$; в частности, окружность, если $\varepsilon = 0$;
2. гипербола, если $\varepsilon > 1$;
3. парабола, если $\varepsilon = 1$.

Из астрономических наблюдений следует, что для всех планет Солнечной системы $\frac{x_0 v_0^2}{k} < 2$. Таким образом, траектории планет являются эллипсами, в одном из фокусов которых находится Солнце.

Отметим, что для Луны и большинства искусственных спутников Земли орбиты также являются эллипсами, близкими к окружности, т.е. эксцентриситет ε мало отличается от нуля. Что касается возвращающихся комет, таких как, например, комета Галлея, то они имеют орбиты в виде «вытянутых» эллипсов, у которых эксцентриситет хотя и меньше единицы, но очень близок к ней. В частности, комета Галлея появляется в зоне видимости Земли приблизительно через каждые 76 лет. Последнее её появление произошло в конце 1985 — начале 1986 года. Небесные тела, которые имеют параболические и гиперболические орбиты, могут наблюдаться лишь однажды, они никогда не возвращаются.

Для доказательства третьего закона Кеплера запишем уравнение эллипса в декартовых координатах:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Если a — большая полуось эллипса, b — малая полуось, то эксцентриситет эллипса равен $\varepsilon = \sqrt{1 - (b/a)^2}$, а площадь области, ограниченной эллипсом, равна πab . Уравнение эллипса в полярных координатах, $r = \frac{r_0}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$, показывает, что

$$r_{\max} = \frac{r_0}{1 - \varepsilon}, \quad r_{\min} = \frac{r_0}{1 + \varepsilon}.$$

В сумме r_{\max} и r_{\min} дают удвоенную большую полуось эллипса, т.е.

$$a = \frac{r_{\max} + r_{\min}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{r_0}{1 - \varepsilon} + \frac{r_0}{1 + \varepsilon} \right) = \frac{r_0}{1 - \varepsilon^2} = \frac{r_0 a^2}{b^2}.$$

Поэтому $b^2 = r_0 a = \frac{x_0^2 v_0^2}{k} a$. Здесь для получения последнего равенства был использован явный вид r_0 из формулы (41).

Обратимся теперь к формуле (40). Пусть $t_1 = 0$ и $t_2 = T$ — период обращения. Тогда площадь заметаемого сектора будет площадью всей области, ограниченной эллипсом. Поэтому

$$S = \pi ab = \frac{x_0 v_0}{2} T \Rightarrow T = \frac{2\pi ab}{x_0 v_0}.$$

Собирая все наработки вместе, получим

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{1}{a^3} \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{x_0^2 v_0^2} = \frac{4\pi^2 b^2}{a x_0^2 v_0^2} = \frac{4\pi^2}{a x_0^2 v_0^2} \frac{x_0^2 v_0^2}{k} a = \frac{4\pi^2}{k},$$

т.е. отношение $\frac{T^2}{a^3}$ постоянно для всех планет.¹

¹ Вспоминая, что $k = GM$, где G — универсальная гравитационная постоянная, а M — масса Солнца, можно использовать третий закон Кеплера для нахождения массы Солнца:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \Rightarrow M = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2}.$$

Для Земли значения a и T известны: Земля движется вокруг Солнца по круговой орбите, расстояние от Земли до Солнца $a = 150$ млн км, период обращения $T = 1$ год $\approx \pi \cdot 10^7$ с. Поэтому

$$M = \frac{4\pi^2 \cdot (1,5 \cdot 10^8)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (\pi \cdot 10^7)^2} \approx \frac{4 \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot 10^8\right)^3}{6\frac{2}{3} \cdot 10^{-11} \cdot 10^{14}} = \frac{81}{40} \cdot 10^{21} \approx 2 \cdot 10^{21} \text{ кг}.$$

Вообще-то, для вычисления M можно обойтись и без законов Кеплера — достаточно знания того, что Земля вращается вокруг Солнца по круговой орбите:

$$G \frac{mM}{R^2} = m\omega^2 R = m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 R \Rightarrow M = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}.$$

Здесь использовано более привычное обозначение R для радиуса орбиты Земли. Обычно задачу о вычислении массы Солнца дают в следующей формулировке: расстояние до Солнца 150 миллионов километров; найти массу Солнца. При этом молчаливо предполагается, что период обращения Земли вокруг Солнца все и так знают. Один мой приятель в ответ предлагал «аналогичную» задачу: расстояние до шкафа 2 метра; найти массу шкафа.

В заключение приведу табличку настоящих эксцентриситетов, длин больших полуосей орбит и периодов обращения вокруг Солнца всех планет Солнечной системы, чтобы желающие на досуге могли ответить на вопрос: «Насколько адекватно вышеприведённая теория описывает реальное положение вещей?».

Планета	ε	a	T	Планета	ε	a	T
Меркурий	0,206	0,387	0,24	Сатурн	0,056	9,539	29,46
Венера	0,007	0,723	0,62	Уран	0,047	19,182	84,01
Земля	0,017	1,000	1,00	Нептун	0,009	30,058	164,8
Марс	0,093	1,524	1,88	Плутон	0,250	39,439	247,7
Юпитер	0,048	5,203	11,86				

Список задач, которые я планировал обсудить, подошёл к концу. До психологического барьера в 40 страниц осталось всего ничего, но мне не хочется оставлять пустой даже одну страницу. Предпочитаю добавить какой-нибудь «довесок».

Арнольдковский «Тривиум», № 75. Вследствие годовых колебаний температуры земля в городе N промерзает на глубину 2 м. На какую глубину она промёрзла бы вследствие суточных колебаний такой же амплитуды?

Решение. Здесь нам придётся вторгнуться на территорию, которая является вотчиной уравнений мат.физики. Со всевозможными поклонами и изъявлениями своего почтения местным богам, позаимствуем одномерное *уравнение теплопроводности*

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (42)$$

и вернёмся к себе, в безопасный и привычный мир обыкновенных дифференциальных уравнений.

Функция $T(x, t)$, которая получается в результате решения уравнения (42), представляет из себя зависимость температуры от расстояния x и времени t . Коэффициент $a^2 = \frac{\eta}{\rho c}$ — это постоянная, зависящая от коэффициента теплопроводности η материала, его плотности ρ и удельной теплоёмкости c . Смысл и величина этого коэффициента нам не потребуются. Главное, что a^2 — это константа.

В данной задаче в качестве материала выступает почва в городе N и, если направить ось Ox вертикально вниз, расстояние x становится глубиной. Таким образом, функция $T(x, t)$ описывает распределение температуры в зависимости от глубины x и времени t . На поверхности земли, т.е. при $x = 0$, температурный режим определяется колебаниями температуры воздуха и по условиям задачи является периодической функцией: $T(0, t) = T_0(t)$, $T_0(t + t_0) = T_0(t)$, где t_0 — период. Явный вид функции $T_0(t)$ и её зависимость от периода t_0 мы не знаем. Пока не будем конкретизировать величину t_0 , но нам понадобятся случаи:

- $t_0 = t_c$ (периодичность — одни сутки);
- $t_0 = t_r = 365t_c$ (периодичность — один год).

Итак, некоторая функция $T_0(t)$ из года в год периодически замораживает и размораживает почву. Поскольку она является граничным условием, $T(x, t)|_{x=0} = T_0(t)$, то естественно предположить, что и на глубине $x \neq 0$ температурный режим $T(x, t)$ тоже является периодической функцией с тем же периодом, что и для $T_0(t)$. Поэтому $T(x, t)$ можно разложить в ряд Фурье¹

$$T(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(x) \exp\left(2\pi i k \frac{t}{t_0}\right). \quad (43)$$

Несколько слов о коэффициентах $c_k(x)$:

$$c_k(x) = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} T(x, t) \exp\left(-2\pi i k \frac{t}{t_0}\right) dt. \quad (44)$$

Функция $T(x, t)$ вещественна, $T(x, t) = \overline{T(x, t)}$. Следовательно, $\overline{c_k(x)} = c_{-k}(x)$. В частности, $c_0(x)$ — вещественная функция.

Как меняется $T(x, t)$ с глубиной? Арнольд пишет, что «земля промерзает на глубину 2 м». Первоначально возникает мысленная картина типа «на поверхности температура не выше -20°C , на глубине в один метр — не выше -10°C , на глубине в два метра — не выше 0°C », но после некоторых размышлений такой вариант событий кажется неправдоподобным. На мой взгляд, возможны два толкования формулировки задачи:

1. на глубине $l = 2$ м установившаяся температура *иногда* бывает ниже 0°C , т.е.

$$T(l, t) \leq 0 \quad \text{для некоторого (или некоторых) } t \in [0, t_0]; \quad (45a)$$

2. на глубине $l = 2$ м установившаяся температура *всегда* ниже 0°C , т.е.

$$T(l, t) \leq 0 \quad \text{для всех } t \in [0, t_0]. \quad (45b)$$

Хочу немного порассуждать на эту тему. Температура на поверхности, задаваемая функцией $T_0(t)$, скорее всего, может быть и положительной, и отрицательной. Лето в городе N, видимо, короткое, зима длинная, максимальная температура в летний период не высока, а минимальная в зимний очень низка. В результате средняя температура оказывается сильно минусовой. Если посмотреть на формулу (44) при $k = 0$, то видно, что $c_0(x)$ и есть эта самая средняя температура на глубине x :

$$c_0(x) = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} T(x, t) dt.$$

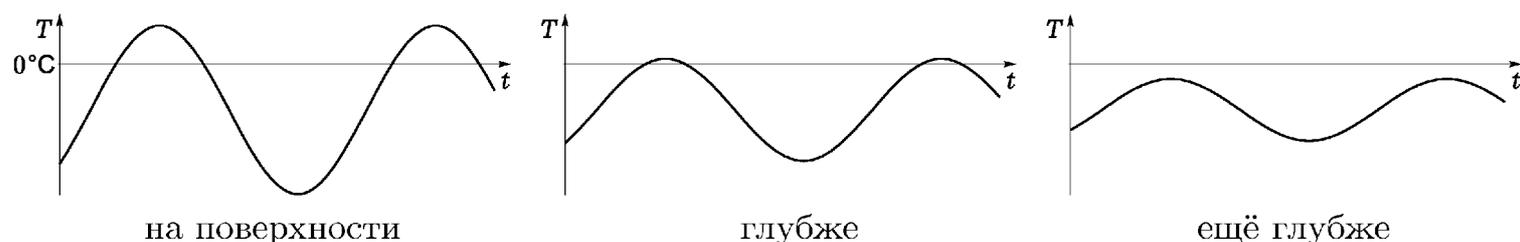
¹ Я абсолютно всегда предпочитаю в таких делах использовать систему экспонент $\{e^{int}, n \in \mathbb{Z}\}$, а не тригонометрическую систему $\{1, \cos nt, \sin nt, n \in \mathbb{N}\}$. Даже если окончательный ответ надо будет представить в вещественной форме. Даже если разлагаемая функция, скажем, чётна. Советую это делать и вам. Удобства при работе с экспонентами, простая форма свойства ортогональности

$$\int_0^{2\pi} e^{int} \cdot e^{-imt} dt = 2\pi \delta_{nm},$$

единообразие записи всех коэффициентов Фурье сэкономят вам немало времени и нервов в итоге.

Что будет, если x начнёт увеличиваться? Тут, видимо, не обойтись без рассмотрения задачи в «мировом масштабе». Земля имеет раскалённое ядро, т.е. на глубине, равной радиусу Земли $R_3 = 6370$ км, поддерживается некоторая высокая постоянная температура: $T(R_3, t) = T_3 \approx 6000^\circ\text{C}$ (по современным представлениям). Это условие, наряду с $T(0, t) = T_0(t)$, можно рассматривать как ещё одно граничное условие для нашей задачи.

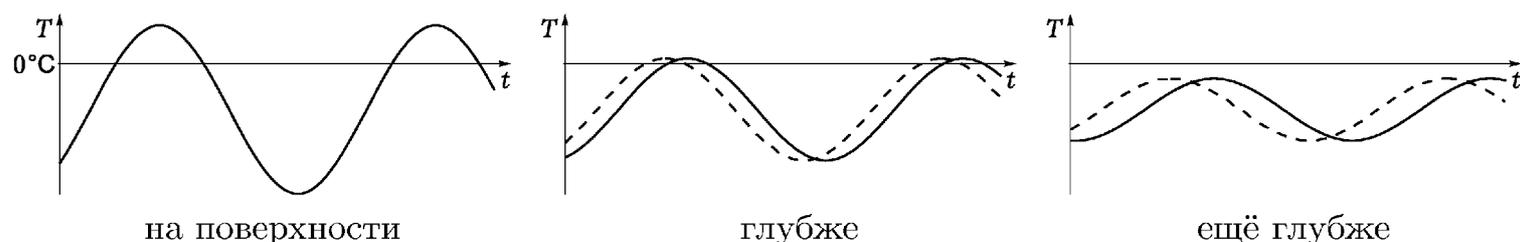
Теперь, если x увеличивается, то на малых глубинах влияние распределения температуры на поверхности $T_0(t)$ будет доминирующим. При этом амплитуда колебаний температуры не может быть такой же большой, как на поверхности: столько тепла, как летом на поверхности, на глубине не будет (прямого доступа к солнечному свету нет), но и максимальных холодов, когда придёт зима, тоже (почва сивелирует, усреднит проникающий холод). Поэтому динамику изменения температуры с глубиной можно схематично изобразить так:



В какую сторону будет сдвигаться средняя температура $c_0(x)$, сказать трудно. Думаю, что она будет монотонно возрастать с глубиной (т.е. чем глубже, тем в *среднем* будет теплее), хотя готов допустить и более хитрый характер поведения. Это, в конце концов, не имеет особого значения. Главное, что средняя температура на поверхности настолько низка, что при уменьшении амплитуды колебаний температуры с глубиной, вся полоса температур в какой-то момент x_0 оказывается в нижней полуплоскости: $T(x_0, t) \leq 0^\circ\text{C}$ для всех t . На той глубине, где выполняется это неравенство, царит вечная мерзлота.

При дальнейшем увеличении глубины разброс возможных значений температуры становится всё меньше и меньше, а влияние температуры в центре Земли будет нарастать. Поэтому средняя температура $c_0(x)$ будет всё выше, а распределение $T(x, t)$ будет всё меньше от неё отличаться, $T(x, t) \approx c_0(x)$. Наконец, в центре Земли $T(R_3, t) = c_0(R_3) = T_3$.

Ещё, наверное, есть какой-то эффект запаздывания: когда на поверхности начинается весенне-летний период и температура повышается, то до глубины эта информация доходит не сразу. Там температура начнёт повышаться только через какое-то время. Это время осознания прихода весны должно быть небольшим для неглубоких слоёв почвы, и более продолжительным для тех слоёв, что поглубже. Поэтому вышеприведённые графики «глубже» и «ещё глубже» для большего правдоподобия надо было бы сместить «правее» и «ещё правее». Примерно вот так:



Приступим теперь к решению задачи. Подставляем ряд Фурье (43) в уравнение теплопроводности (42) и получаем дифференциальные уравнения на коэффициенты $c_k(x)$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(x) \exp\left(2\pi i k \frac{t}{t_0}\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{2\pi i k}{t_0} c_k(x) - a^2 c_k''(x)\right) \exp\left(2\pi i k \frac{t}{t_0}\right) = 0. \quad \Rightarrow$$

Для каждого $k \in \mathbb{Z}$ функция $c_k(x)$ удовлетворяет уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$c_k''(x) - \frac{2\pi i k}{a^2 t_0} c_k(x) = 0.$$

Если $k = 0$, то $c_0(x) = A_0 x + B_0$.

Если $k \neq 0$, то характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 = \frac{2\pi i k}{a^2 t_0}$. Как уже отмечалось, $\overline{c_k(x)} = c_{-k}(x)$, поэтому достаточно рассмотреть случай $k > 0$. Тогда

$$\lambda = \pm \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2\pi i k}{t_0}} = \pm \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2\pi k}{t_0}} e^{\frac{\pi i}{4}} = \pm \frac{1+i}{a} \sqrt{\frac{\pi k}{t_0}}.$$

Корни нашли, строим $c_k(x)$:

$$c_k(x) = A_k \exp\left((1+i) \sqrt{\frac{\pi k}{t_0}} \frac{x}{a}\right) + B_k \exp\left(-(1+i) \sqrt{\frac{\pi k}{t_0}} \frac{x}{a}\right).$$

Теперь используем граничные условия. Знание функции $T_0(t)$ и формула (44) позволяют найти $c_k(0)$. Условие $T(R_3, t) = T_3$ и формула (44) говорят о том, что $c_0(R_3) = T_3$ и $c_k(R_3) = 0$ при $k \neq 0$. Поэтому можно выразить A_k и B_k через $c_k(0)$.

Для $k = 0$ всё просто:

$$c_0(x) = c_0(0) + (T_3 - c_0(0)) \frac{x}{R_3}.$$

В частности, средняя температура с глубиной действительно монотонно растёт.

Для $k > 0$ получаются уравнения

$$\begin{cases} A_k + B_k = c_k(0), \\ A_k \exp\left((1+i) \sqrt{\frac{\pi k}{t_0}} \frac{R_3}{a}\right) + B_k \exp\left(-(1+i) \sqrt{\frac{\pi k}{t_0}} \frac{R_3}{a}\right) = 0, \end{cases}$$

которые тоже не доставляют никаких проблем. Можно, как обычно, взять первое уравнение, выразить одно неизвестное через другое, затем подставить во второе уравнение и т.д. А можно начать со второго уравнения: $A_k \exp_1 + B_k \exp_2 = 0$. Его общее решение можно представить в виде $A_k = C \cdot \exp_2$, $B_k = -C \cdot \exp_1$ и затем

найти константу C из первого уравнения.¹ Так или иначе, числа A_k и B_k находятся, а функция $c_k(x)$ принимает вид

$$c_k(x) = c_k(0) \frac{\operatorname{sh} \left((1+i) \sqrt{\frac{\pi k}{t_0}} \frac{R_3 - x}{a} \right)}{\operatorname{sh} \left((1+i) \sqrt{\frac{\pi k}{t_0}} \frac{R_3}{a} \right)}.$$

Учитывая гигантскую разницу между $l = 2 \text{ м}$ и $R_3 = 6370 \text{ км}$, полученное выражение представляется чересчур громоздким. Если ограничиться глубинами $x \ll R_3$, то можно перейти к асимптотически эквивалентному выражению:

$$c_k(x) \approx c_k(0) \frac{\exp \left((1+i) \sqrt{\frac{\pi k}{t_0}} \frac{R_3 - x}{a} \right)}{\exp \left((1+i) \sqrt{\frac{\pi k}{t_0}} \frac{R_3}{a} \right)} = c_k(0) \exp \left(-(1+i) \sqrt{\frac{\pi k}{t_0}} \frac{x}{a} \right),$$

которое, во-первых, проще, а, во-вторых, отличается от точного выражения на экспоненциально малую величину $O(e^{-\text{const} \cdot R_3})$. Точно также $c_0(x) \approx c_0(0)$, т.к. от такой замены на глубинах $\sim 2 \text{ м}$ мы теряем не более чем $0,002^\circ$. Приближённые выражения для $c_k(x)$ можно было бы получить и с меньшими издержками, если вместо граничного условия $T(R_3, t) = T_3$ использовать $T(+\infty, t) = T_\infty < +\infty$.

Подставляем теперь все $c_k(x)$ в (43) и получаем

$$\begin{aligned} T(x, t) &= c_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_{-k}(x) \exp \left(-2\pi i k \frac{t}{t_0} \right) + c_k(x) \exp \left(2\pi i k \frac{t}{t_0} \right) \right) = \\ &= c_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[c_k(x) \exp \left(2\pi i k \frac{t}{t_0} \right) \right] \approx \\ &\approx c_0(0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \exp \left(-\sqrt{\frac{\pi k}{t_0}} \frac{x}{a} \right) \operatorname{Re} \left[c_k(0) \exp \left(2\pi i k \frac{t}{t_0} - i \sqrt{\frac{\pi k}{t_0}} \frac{x}{a} \right) \right]. \end{aligned}$$

Если бы функция $T_0(t)$ была известна, то мы бы нашли все $c_k(0)$ по формуле (44) и получили распределение температуры $T(x, t)$. Но нам не это нужно; у нас вопрос такой, что для ответа на него необязательно знать явный вид $T_0(t)$, а вполне достаточно последней формулы. Эта формула показывает, что период t_0 , глубина x и время t входят в $T(x, t)$ только в комбинациях $\frac{x}{\sqrt{t_0}}$ и $\frac{t}{t_0}$, т.е. $T(x, t) = f \left(\frac{x}{\sqrt{t_0}}, \frac{t}{t_0} \right)$.

Следовательно, неравенство (45) можно представить в виде

$$f \left(\frac{l}{\sqrt{t_r}}, \frac{t}{t_r} \right) \leq 0, \quad \text{где } t \in [0, t_r].$$

¹ Этот нехитрый приём особенно полезен, когда приходится искать компоненты собственных векторов при решении линейных систем $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{A}\mathbf{u}$. У Филиппова все матрицы в задачах на эту тему целочисленные, поэтому когда встречается, например, уравнение $3a + 2b = 0$, то лучше записывать вектор $(a, b)^t$ не в виде $(a, -\frac{3}{2}a)^t$ или $(-\frac{2}{3}b, b)^t$, а в виде $(2c, -3c)^t$ или $(-2c, 3c)^t$.

Или в виде

$$f\left(\frac{l\sqrt{t_c/t_r}}{\sqrt{t_c}}, \frac{t \cdot t_c/t_r}{t_c}\right) \leq 0.$$

Последняя форма записи позволяет перейти к суточным колебаниям температуры. А именно, когда периодичность колебаний температуры составляет не один год, а одни сутки, то все временные процессы убыстряются, $t \rightarrow \frac{t_c}{t_r} t \in [0, t_c]$, а граница промерзания сдвигается от $l = 2$ м к отметке

$$l\sqrt{\frac{t_c}{t_r}} = l\sqrt{\frac{t_c}{365t_c}} = \frac{2}{\sqrt{365}} \approx 0,104 \text{ м.}$$

У щуки нет лёгких. Это верно. Правда, у неё должен быть плавательный пузырь, функция коего, как мне известно, ихтиологам ещё не окончательно ясна. Мой знакомый ихтиолог Женька Скороматов полагает даже, что эта функция неясна совершенно, и, когда я пытаюсь аргументировать доводами из брошюрок общества «Знание», Женька рычит и плюётся. Совершенно утрачивает присущий ему дар человеческой речи...

А. и Б. Стругацкие. «Понедельник начинается в субботу».

Ещё несколько слов в заключение. К данной задаче как нельзя лучше подходит термин *дифференциальная модель*. Только при малых глубинах, когда счёт идёт на метры, сохраняется правдоподобие этой модели применительно к такому сложному объекту, как планета в целом. В реальности же у Земли наличествуют кора, мантия и ядро, которые в свою очередь подразделяются на зоны, и свойства их таковы, что никак не укладываются в прокрустово ложе нашей однородной модели. Поэтому и профессиональный геофизик отреагировал бы на вышеприведённые рассуждения ироническим хмыканьем (как минимум), и вы не пытайтесь в найденные формулы подставить что-то типа $x = \frac{1}{2}R_3$. На этом и остановимся.